

理工类本科生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

模糊集理论与方法

张振良 张金玲 殷允强 李扉 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社



21世纪高等

理工类本

■ 责任编辑：李汉保

■ 责任校对：刘　欣

■ 版式设计：詹锦玲

■ 封面设计：涂　驰

冬　近

ISBN 978-7-307-07339-5



定价：28.00元



理工类本科生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

模糊集理论与方法

■ 张振良 张金玲 殷允强 李扉 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

模糊集理论与方法/张振良,张金玲,殷允强,李扉编著.—武汉:武汉大学出版社,2010.1

21世纪高等学校数学系列教材　理工类本科生

ISBN 978-7-307-07339-5

Ⅰ.模…　Ⅱ.①张…　②张…　③殷…　④李…　Ⅲ.模糊集—高等学校—教材　Ⅳ.O159

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第172780号

责任编辑:李汉保　　责任校对:刘　欣　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:通山金地印务有限公司

开本:787×1092　1/16　印张:17　字数:339千字　插页:2

版次:2010年1月第1版　　2010年1月第1次印刷

ISBN 978-7-307-07339-5/O·412　　定价:28.00元

前　言

1965 年，美国控制论专家 L. A. Zadeh 在《Information and control》发表的开创性论文《Fuzzy sets》，创立了模糊集合论. 模糊集合作为经典集合的推广，它概括了更加普遍，更加多样的数学概念，推广了数学理论的发展，形成了一门新的数学学科——模糊数学. 使得经典数学的各个数学分支在更广阔、更深刻的意义下向前推进，形成了模糊数学的相应数学分支：模糊测度、模糊拓扑、模糊代数、模糊概率、模糊规划等. 至今从模糊数学本身的基础理论到各个分支都形成了自己的理论框架和应用的理论基础. 引起了国内外各领域，众多学者的关注. 是从事研究的人员众多，成果显著、应用广泛的数学学科之一.

1973 年，L. A. Zadeh 又提出了用模糊语言描述系统的方法，并为模糊控制的实施提供了有效的方法. 把模糊系统作为研究模糊性的内在规律，探讨模糊语言和模糊逻辑. 在这方面，模糊数学与人工智能、知识工程、专家系统、神经网络等方面的有机结合，促进了计算机科学，多媒体技术、自动控制和信息的采集与处理等诸多技术的发展，更好地模拟人的思维，对客观事物进行识别、聚类、决策、评价、控制和优化等. 在应用科学、管理科学、决策科学，包括理、工、农、医及社会科学等众多领域都具有广泛的应用.

1982 年，波兰数学家 Z. Pawlak 在《International Journal of Computer and Information Sciences》上发表的文章《Rough Sets》中，首次提出了一种处理不确定性现象的数学理论——粗糙集理论。该理论与同样处理不确定性现象的模糊理论的区别在于，该理论无需提供所需处理的数据集合之外的任何先验信息，所以模糊集理论和粗糙集理论的相结合，在处理不确定性问题时有很好的互补性。1990 年，Dubois. D 和 Prade. H 首先提出了模糊粗糙集模型，将论域上的等价关系推广到模糊等价关系，将被近似描述对象集推广到模糊集上。到 20 世纪 90 年代末期，模糊粗糙集模型在理论研究和实际应用中都取得了丰富的成果。模糊粗糙集理论在机器学习与发现、数据挖掘、决策支持与分析、专家系统、模式识别、智能控制等方面都具有广泛的应用。

本书系统地介绍了模糊集的基本理论，包括模糊集的分解定理、表现定理、扩张原理、模糊关系等基础内容，同时还介绍了模糊聚类、模糊评价、模糊决策、模糊规划等模糊集的应用方法。介绍了模糊逻辑、模糊推理，并以此为基础，阐述了模糊控制理论及其实现方法。最后介绍了粗糙集和模糊粗糙集的基本

理论，介绍了信息系统与模糊信息系统的属性约简方法。全书共分 10 章，第 1 章介绍了格和模糊格的基础知识，第 2 章、第 3 章和第 4 章介绍了模糊集的基本理论，第 5 章、第 6 章和第 7 章介绍了模糊逻辑、模糊推理和模糊控制的基本理论和应用方法。第 8 章、第 9 章介绍了模糊决策和模糊规划的理论与方法。第 10 章介绍了粗糙集与模糊粗糙集的基本理论和信息系统的属性约简方法。

本书与其他模糊集理论方面的书所不同的是，本书以格论为基础，在完全分配格上阐述模糊集理论，形成具有自身特色的理论体系。另外，在应用基础方面，本书涉及了模糊逻辑、模糊控制、模糊聚类、模糊评价、模糊决策、模糊规划以及模糊信息系统的属性约简等的理论基础和应用方法。是在介绍模糊集理论与方法方面较为全面的一本教材和参考书。

本书第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 4 章由张振良编写；第 5 章、第 6 章由张金玲、殷允强编写；第 7 章、第 8 章、第 9 章由殷允强、李扉编写，第 10 章由李扉编写。全书由张振良统稿，张金玲编排。

在本书的编写过程中参考了张文修教授的《模糊数学引论》，罗承忠教授的《模糊集引论》，汪培庄教授和李洪兴教授的《模糊系统理论与模糊计算机》等著作。本书在编写和出版过程中，得到了武汉大学出版社理工事业部李汉保编辑的大力支持，得到了昆明理工大学津桥学院的关心和支持，借此机会，表示衷心感谢！

由于作者的学识和水平有限，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者和专家批评指正。

作　者

2009 年 8 月

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议、策划，组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材。旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学（福建泉州）、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一．在国内有较高的知名度和社会影响力、武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作，力争将该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21 世纪高等学校数学系列教材编委会

2007 年 7 月

目 录

第 1 章　格与模糊格

§1.1　集　合

1.1.1　集合及其运算

集合概念是现代数学的最基本的概念. 我们把所考虑的对象的全体称为一个集合,也称为论域,记为 X. X 中的对象称为元素,记为 $x,y,\cdots$. 若 x 是 X 的元素,称为 x 属于 X,记为 $x\in X$;若 x 不是 X 的元素,称为 x 不属于 X,记为 $x\notin X$,或 $x\ \overline{\in} X$. X 中的一部分元素组成的集合称为 X 的子集,记为 $A,B,\cdots$. 若 A 是 X 的子集,记为 $A\subseteq X$;若 A 不是 X 的子集,记为 $A\nsubseteq X$. 不含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$. 空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

给定性质 P,$P(x)$ 表示 x 具有性质 P,所有具有性质 P 的元素汇集成一个集合 X,记为

$$X = \{x \mid P(x)\} \tag{1.1}$$

设 X 是论域,A,B 是 X 的两个子集,若 A 中的元素都是 B 中的元素,称为 A 包含于 B,或称为 B 包含 A,记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

显然,$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x(x\in A)\rightarrow(x\in B)$,$A=B$ 定义为 $A\subseteq B, B\subseteq A$,即

$$A=B\Leftrightarrow\forall x(x\in A)\rightarrow(x\in B)\text{ 且 }\forall x(x\in B)\rightarrow(x\in A).$$

显然,$A\subseteq A$,$\varnothing\subseteq A$.

把论域 X 的每个子集看做一个元素,由 X 的某些子集组成一个新的集合,即集合的集合,称为集合族. 而 X 的所有子集组成的集合族称为 X 的幂集,记为 $P(X)$ 或 2^X,即

$$P(X) \triangleq \{A \mid A \subseteq X\} \tag{1.2}$$

由此,$A\subseteq X\Leftrightarrow A\in P(X)$.

定义 1.1.1　设 $A,B\in P(X)$,记

$$A \cup B \triangleq \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\} \tag{1.3}$$

$$A \cap B \triangleq \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\} \tag{1.4}$$

$$A' \triangleq \{x \mid x \notin A\} \tag{1.5}$$

分别称为 A 与 B 的并、交和 A 的余集.

定理 1.1.1 设 $A,B,C\in P(X)$，则并、交、余满足下列性质：

(1)幂等律 $A\cup A=A, A\cap A=A$;

(2)交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(3)结合集 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4)吸收集 $A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$;

(5)分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(6)同一律 $A\cup\varnothing=A, A\cap X=A$;

(7)两极律 $A\cup X=X, A\cap\varnothing=\varnothing$;

(8)对合律 $(A')'=A$;

(9)对偶律 $(A\cup B)'=A'\cap B', (A\cap B)'=A'\cup B'$;

(10)互补律 $A\cup A'=X, A\cap A'=\varnothing$.

证明从略.

集合的并、交可以推广到任意多个集合的情况，设 T 是指标集，$\forall t\in T$, $A_t\in P(X)$，记

$$\bigcup_{t\in T} A_t \triangleq \{x \mid \exists t\in T, x\in A_t\} \tag{1.6}$$

$$\bigcap_{t\in T} A_t \triangleq \{x \mid \forall t\in T, x\in A_t\} \tag{1.7}$$

特别地，指标集 $T=\varnothing$，则

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \varnothing$$

$$\bigcap_{t\in T} A_t = X$$

分配律和对偶律可以推广到无穷情况：

(5′)分配律 $A\cup(\bigcap_{t\in T} A_t)=\bigcap_{t\in T}(A\cup A_t)$,

$A\cap(\bigcup_{t\in T} A_t)=\bigcup_{t\in T}(A\cap A_t)$;

(9′)对偶律 $(\bigcup_{t\in T} A_t)'=\bigcap_{t\in T} A_t'$,

$(\bigcap_{t\in T} A_t)'=\bigcup_{t\in T} A_t'$.

定义 1.1.2 设 $A,B\in P(X)$，记

$$A-B \triangleq \{x \mid x\in A, x\notin B\} \tag{1.8}$$

$$A\ominus B \triangleq (A-B)\cup(B-A) \tag{1.9}$$

分别称为 A 与 B 的差和对称差.

显然

$$A-B=A\cap B' \tag{1.10}$$

$$A\ominus B=(A\cup B)-(A\cap B) \tag{1.11}$$

设 $A\in P(X)$，X 的子集 A 可以用二值函数表示，当 $x\in A$ 时函数值为 1，当 $x\notin A$ 时函数值为 0，所以 X 的子集 A 可以用下列的函数唯一确定.

定义 1.1.3　设 $A \in P(X)$，函数 $X_A: X \to [0,1]$ 为

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{1.12}$$

称为 A 的特征函数.

特别地　　$X_X(x) = 1$，　$X_\varnothing(x) = 0$.

为了方便，简记 $X_A(x) \triangleq A(x)$. 由此，集合的包含、相等，并、交、余用特征函数分别表示如下：$\forall A, B \in P(X)$，则：

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X, A(x) \leqslant B(x)$；

(2) $A = B \Leftrightarrow \forall x \in X, A(x) = B(x)$；

(3) $(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$；

(4) $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$；

(5) $A'(x) = 1 - A(x)$.

其中"$\vee$"表示上确界"sup"，"$\wedge$"表示下确界"inf".

证明简单，从略.

同理，无穷多个集合的并、交用特征函数分别表示为，$\forall t \in T, A_t \in P(X)$，则：

(6) $(\bigcup_{t \in T} A_t)(x) = \bigvee_{t \in T} A_t(x)$；

(7) $(\bigcap_{t \in T} A_t)(x) = \bigwedge_{t \in T} A_t(x)$.

1.1.2　映射

定义 1.1.4　设 X, Y 是集合，如果存在一个法则 f，对于每一个 $x \in X$，通过法则 f 都有唯一确定的一个 $y \in Y$ 与之对应，则称 f 是 X 到 Y 的一个映射，记为

$$f: X \to Y$$

X 称为映射 f 的定义域，$f(X)$ 称为 f 的值域；y 称为 x 在 f 作用下的像，记为 $y = f(x)$，而符号 $f: x \to y$ 表示 x 是 y 的原像.

特别地，映射 $I_X: X \to X, x \to x$ 称为 X 上的恒等映射或单位映射.

在现代数学中，映射与函数是同义词.

设 $f: X \to Y$，$\forall A \subseteq X$，记

$$f(A) \triangleq \{f(x) \mid x \in A\} \tag{1.13}$$

称为 A 在 f 作用下的像，显然 $f(A) \subseteq Y$. 特别地，$f(X)$ 称为映射 f 的像集，记为 $\mathrm{Im}f$. 一般地，$f(X) \subseteq Y$. $\forall B \subseteq Y$，记

$$f^{-1}(B) \triangleq \{x \in X \mid f(x) \in B\} \tag{1.14}$$

称为 B 在 f 作用下的完全原像，显然 $f^{-1}(B) \subseteq X$，$f^{-1}(Y) = X$.

注：f^{-1} 不是 Y 到 X 的一个映射，而是 Y 到 X 的一种关系.

定理 1.1.2　设 $f: X \to Y$，若 $A, B \in P(X)$，则：

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$；

(2)$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

证明 (1) $\forall y\in f(A\cup B)\Leftrightarrow \exists x\in A\cup B, f(x)=y, \Leftrightarrow \exists x\in A, f(x)=y$,或 $\exists x\in B, f(x)=y. \Leftrightarrow y\in f(A)$或$y\in f(B)\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)$,故

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B).$$

同理证(2).

一般地,$f:X\to Y$, $\{A_t\}_{t\in T}$是X的子集族,则:

(3)$f(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}f(A_t)$;

(4)$f(\bigcap_{t\in T}A_t)\subseteq\bigcap_{t\in T}f(A_t)$.

定理 1.1.3 设$f:X\to Y$,若$A,B\in P(Y)$,则:

(1)$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$;

(2)$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$;

(3)$f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$.

证明 (1) $\forall x\in f^{-1}(A\cup B)\Leftrightarrow f(x)\in A\cup B\Leftrightarrow f(x)\in A$ 或 $f(x)\in B\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)$或$x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$,故$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

同理证(2),现证(3).

(3) $\forall x\in f^{-1}(A-B)\Leftrightarrow f(x)\in A-B\Leftrightarrow f(x)\in A,\ f(x)\notin B\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)$, $x\notin f^{-1}(B)\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$,故$f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$.

在(3)式中,取$Y=A$,则得

(4) $$f^{-1}(B')=(f^{-1}(B))'.$$

一般地,$f:X\to Y$, $\{B_t\}_{t\in T}$是Y的子集族,则

(5) $$f^{-1}(\bigcup_{t\in T}B_t)=\bigcup_{t\in T}f^{-1}(B_t).$$

(6) $$f^{-1}(\bigcap_{t\in T}B_t)=\bigcap_{t\in T}f^{-1}(B_t).$$

定理 1.1.4 设$f:X\to Y$.

(1)若$A\in P(X)$,则$A\subseteq f^{-1}(f(A))$;

(2)若$B\in P(Y)$,则$B\supseteq f(f^{-1}(B))$.

证明(1) $\forall x\in A\Rightarrow f(x)\in f(A)\Rightarrow x\in f^{-1}(f(A))$,故$A\subseteq f^{-1}(f(x))$. 同理证(2).

定理 1.1.5 设$f:X\to Y, g:Y\to Z$,定义$g\circ f$为:$\forall x\in X, (g\circ f)(x)=g(f(x))$,则$g\circ f$是$X$到$Z$的映射.

证明 $\forall x\in X$,令$y=f(x)$,则$y\in Y$,又令$z=g(y)=g(f(x))$,则$z\in Z$,即$\forall x\in X$,都$\exists z\in Z$,使z和x对应. 现在证明这种对应的唯一性,假若$\exists z_1,z_2\in Z, z_1\neq z_2$,使$z_1=(g\circ f)(x)=g(f(x))$, $z_2=(g\circ f)(x)=g(f(x))$,即$z_1=g(y)$, $z_2=g(y)$,这与g是Y到Z的映射矛盾,故$z_1=z_2$,即x在$g\circ f$的作用下,像是唯一的,所以$g\circ f$是X到Z的映射.

定义 1.1.5 设$f:X\to Y, g:Y\to Z$,则称$g\circ f:X\to Z, (g\circ f)(x)=g(f(x))$为$f$和$g$的复合映射.

定义 1.1.6　设 $f:X\to Y$.

(1)若 $\forall x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 是单射,单射也称为一一映射;

(2)若 $\forall y\in Y,\exists x\in X$,使 $f(x)=y$,则称 f 是满射,满射也称为在上映射;

(3)若 f 既是单射,又是满射,则称 f 是双射,双射也称为一一对应.

定理 1.1.6　设 $f:X\to Y,g:Y\to Z$.

(1)若 f 和 g 是单射,则 $g\circ f$ 也是单射;

(2)若 f 和 g 是满射,则 $g\circ f$ 也是满射;

(3)若 f 和 g 是双射,则 $g\circ f$ 也是双射.

证明简单,从略.

定理 1.1.7　设 $f:X\to Y$ 是双射,定义 f^{-1} 为 $\forall y\in Y$,若 $f(x)=y$ 时,$x=f^{-1}(y)$,则 f^{-1} 是 Y 到 X 的双射,并且 $f\circ f^{-1}=I_Y$, $f^{-1}\circ f=I_X$.

证明简单,从略.

定义 1.1.7　设 $f:X\to Y$ 是双射,则称 $f^{-1}:Y\to X(f(x)=y$ 时,$f^{-1}(y)=x)$ 为 f 的逆映射.

定义 1.1.8　设 $f:X\to Y,A\subseteq X$,定义 $g:A\to Y,\forall x\in A,g(x)=f(x)$,则称 g 是 f 在 A 上的限制,记为 $g=f|A$,此时也称 f 是 g 在 X 上的扩张.

§1.2　代数系统

设 X,Y 是两个非空集合,由 X 和 Y 的任意两个元素的有序搭配构成一个新的集合.

$$X\times Y\triangleq\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}\tag{1.15}$$

称为 X 和 Y 的笛卡儿积,简称为直积.

$X\times Y$ 的元素是 X 的一个元素 x 和 Y 的一个元素 y 构成的序偶 (x,y),而且 X 的元素在前,称为第一坐标,Y 的元素在后,称为第二坐标.

一般地,$X\times Y\neq Y\times X$.

两个集合的直积可以推广到 n 个集合或无穷多个集合上去.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 个非空集合,则由它们的元素构成的 n 元序组作为元素的集合.

$$\prod_{i=1}^{n}X_i\triangleq X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in X_i,1\leqslant i\leqslant n\}\tag{1.16}$$

称为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的笛卡儿积,简称直积.

特别地,$X_1=X_2=\cdots=X_n\triangleq X$ 时,简记为 X^n,即 $X^n=X\times X\times\cdots\times X$.

例如,实平面 $\mathbf{R}^2$ 是实直线的二维直积;三维实空间 $\mathbf{R}^3$ 是实直线的三维直积,

也是二维实平面和一维实直线的直积，即 $\mathbf{R}^3=\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}$.

一般地，$\{X_t\}_{t\in T}$是一集合族，则它们的直积记为

$$\prod_{t\in T}X_t\triangleq\{f\mid f:T\to\bigcup_{t\in T}X_t,\ \forall t\in T,\ f(t)\in X_t\}\tag{1.17}$$

定义 1.2.1 设 X 是非空集合，X^n 到 X 的任何一个映射

$$f:X^n\to X,(x_1,x_2\cdots,x_n)\to f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

称为 X 中的一个 n 元运算.

特别地，(1)映射 $f:X\to X,x\to f(x)$ 称为 X 中的一元运算；

(2)映射 $f:X^2\to X,(x,y)\to f(x,y)\triangleq xfy$ 称为 X 中的二元运算.

例如，加法，减法，乘法是整数，有理数，实数和复数中的二元运算；除法是非零有理数，非零实数，非零复合中的二元运算. 取相反数是整数，有理数，实数和复数中的一元运算；取倒数是非零有理数，非零实数，非零复数中的一元运算.

又如集合的并、交、差是集合幂集 $P(X)$ 中的二元运算；取余是 $P(X)$ 中的一元运算.

定义 1.2.2 非空集合 X 和 X 上的 m 个运算 $f_1,f_2,\cdots,f_m$（它们可以是各种不同元的运算）组成的系统称为一个代数系统，记为$(X,f_1,f_2,\cdots,f_m)$.

例如，若 $\mathbf{R}$ 是实数集，则$(\mathbf{R},+)$，$(\mathbf{R},+,-,\cdot)$是代数系统.

又如，设 X 是集合，则$(P(X),\cap,\cup)$，$(P(X),\cup,\cap,')$是代数系统.

定义 1.2.3 设$(X,*,\circ)$是代数系统（其中 $*$，$\circ$ 是 X 中的二元运算）.

(1) $\forall x\in X$，若 $x*x=x$，则称 $*$ 满足幂等律；

(2) $\forall x,y\in X$，若 $x*y=y*x$，则称 $*$ 满足交换律；

(3) $\forall x,y,z\in X$，若$(x*y)*z=x*(y*z)$，则称 $*$ 满足结合律；

(4) $\forall x,y\in X$，若 $x\circ(x*y)=x,x*(x\circ y)=x$，则称 $*$ 和 $\circ$ 满足吸收律；

(5) $\forall ,x,y,z\in X$，若 $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$，$(y\circ z)*x=(y*x)\circ(z*x)$，则称 $*$ 对 $\circ$ 满足分配律；前者称为左分配律，后者称为右分配律；

(6) $\forall x\in X$，若 $\exists e_l(e_r)\in X$，使 $e_l*x=x(x*e_r=x)$，则称 $e_l(e_r)$ 为 X 中 $*$ 的左（右）单位元；若 e 既是左单位元，又是右单位元，则称 e 是 X 中 $*$ 的单位元；

(7) $\forall x\in X$，若 $\exists\theta_l(\theta_r)\in X$，使 $\theta_l*x=\theta_l(x*\theta_r=\theta_r)$，则称 $\theta_l(\theta_r)$ 为 X 中 $*$ 的左（右）零元；若 θ 既是左零元，又是右零元，则称 θ 是 X 中 $*$ 的零元；

(8)设 e 是 X 中 $*$ 的单位元，$\forall x\in X$，都 $\exists y_l(y_r)\in X$，使 $y_l*x=e(x*y_r=e)$，则称 $y_l(y_r)$ 为 X 中 x 关于 $*$ 的左（右）逆元；若 y 即是 x 的左逆元，又是 x 的右逆元，则称 y 是 x 的逆元，记为 x^{-1}.

例如，设 $\mathbf{R}$ 是实数集，则在$(\mathbf{R},+,\cdot)$中，“$+$”和“$\cdot$”都有交换律、结合律，但无幂等律；“$\cdot$”对“$+$”有分配律；“$+$”的单位元是 0，$\forall x\in\mathbf{R}$，x 关于“$+$”的逆元是 $-x$；“$\cdot$”的单位元是 1，$\forall x\in\mathbf{R}$，若 $x\neq0$ 时，x 关于“$\cdot$”的逆元是 x^{-1}；而 $\mathbf{R}$ 中“$\cdot$”的零元是 0.

又如 X 是集合，$(P(X),\cup,\cap)$ 中，“$\cup$”和“$\cap$”都有幂等律，交换律，吸收律，结合律，而且相互之间有分配律. “$\cup$”的单位元是 $\varnothing$，“$\cap$”的单位元是 X；“$\cup$”的零元是 X，“$\cap$”的零元是 $\varnothing$，$\forall A\in P(X)$，$A\neq\varnothing$，$A\neq X$，则 A 关于“$\cup$”和“$\cap$”均无逆元.

定理 1.2.1　设 $(X,*)$ 是代数系统，“$*$”是二元运算.

(1) 若 e_l,e_r 分别是“$*$”的左单位元和右单位元，则有 $e_l=e_r\triangleq e$，并且 e 是 X 中“$*$”的唯一单位元；

(2) 若 θ_l,θ_r 分别是“$*$”的左零元和右零元，则有 $\theta_l=\theta_r\triangleq\theta$，且 θ 是 X 中“$*$”的唯一零元；

(3) 若“$*$”是 X 中可结合的运算，e 是该运算下的单位元，$\forall x\in X$，若 x 有左逆 y_l 和右逆 y_r，则有 $y_l=y_r\triangleq y$，且 y 是 x 的唯一逆元.

证明　(1) 由于 $e_l=e_l*e_r=e_r$，记 $e=e_l=e_r$，又设 e' 也是 X 中的单位元，则 $e'=e*e'=e$，所以 e 是 X 中唯一的单位元.

(2) 的证明类似于 (1).

(3) 因为 $y_l=y_l*e=y_l*(x*y_r)=(y_l*x)*y_r=e*y_r=y_r$，记 $y=y_l=y_r$，则 y 是 X 中 x 的逆元. 又设 y' 也是 x 的逆元，则

$$y'=y'*e=y'*(x*y)=(y'*x)*y=e*y=y$$

所以 y 是 x 的唯一逆元.

定理 1.2.2　设 $(X,*)$ 是代数系统，“$*$”是二元运算，e 和 θ 分别是单位元和零元，若 X 至少有两个元素，则 $e\neq\theta$.

证明　假若 $e=\theta$，则 $\forall x\in X$，有 $x=x*e=x*\theta=\theta$，与 X 中至少有两个元素矛盾，故 $e\neq\theta$.

定义 1.2.4　设 $(X,*)$ 是代数系统，“$*$”是二元运算，$\forall x,y,z\in X$ 有：

(1) 若 $x*y=x*z$ 且 $x\neq\theta$，则 $y=z$；

(2) 若 $y*x=z*x$ 且 $x\neq\theta$，则 $y=z$.

则称“$*$”满足消去律，其中 (1) 称为左消去律，(2) 称为右消去律.

例如集合 X 的幂集 $P(X)$ 中的并、交运算不满足消去律，但对称差运算满足消去律，即 $\forall A,B,C\in P(X)$，$A\cup B=A\cup C\nRightarrow B=C$，$A\cap B=A\cap C\nRightarrow B=C$，但

$$A\ominus B=A\ominus C\Rightarrow B=C,\ B\ominus A=C\ominus A\Rightarrow B=C.$$

定义 1.2.5　设 $(X,*_1,*_2,\cdots,*_m)$ 和 $(Y,\circ_1,\circ_2,\cdots,\circ_m)$ 是两个同型代数系统（即运算的个数相等且对应运算的元数相同），若映射 $f:X\to Y$ 满足：

$\forall_i(1\leqslant i\leqslant m)$，若“$*_i$”和“$\circ_i$”是 n 元运算，则 $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$，都有

$$f(*_i(x_1,x_2,\cdots,x_n))=\circ_i(f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m)) \tag{1.18}$$

则称 f 是 X 到 Y 的同态映射，也称代数系统 $(X,*_1,*_2,\cdots,*_m)$ 和 $(Y,\circ_1,\circ_2,\cdots,\circ_m)$ 同态. 当 f 是单射时，称为单同态；当 f 是满射时，称为满同态；当 f 是双射时，称为同构，此时记为 $X\trianglelefteq Y$.

特别地,(1)若“ $*$ ”和“ $\circ$”是一元运算,则同态表达式(1.18)记为:$\forall x\in X$

$$f(*x)=\circ f(x) \tag{1.19}$$

(2)若“ $*$ ”和“ $\circ$”是二元运算,则同态表达式(1.18)记为:$\forall x_1,x_2\in X$

$$f(x_1*x_2)=f(x_1)\circ f(x_2) \tag{1.20}$$

例 1.2.1 设 $\mathbf{R}$ 是实数集,$\mathbf{R}^*$ 是非零正实数集,代数系统($\mathbf{R}^*$,·,-1)(“·”是乘法,“-1”是取倒数)和代数系统($\mathbf{R}$,+,-)(“+”是加法,“-”是取相反数).令 $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$ 为 $\forall x\in\mathbf{R}^*$,$f(x)=\ln x$,显然 f 是双射.对于 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}^*$,$\ln(x_1\cdot x_2)=\ln x_1+\ln x_2$,即 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;又 $\forall x\in X$,$\ln x^{-1}=-\ln x$,即 $f(x^{-1})=-f(x)$,故 f 是($\mathbf{R}^*$,·,-1)到($\mathbf{R}$,+,-)的同态映射,所以 $\mathbf{R}^*$ 和 $\mathbf{R}$ 同构.

定义 1.2.6 设$(X,*_1,*_2,\cdots,*_m)$是代数系统,$B\subseteq X$,若 B 对 $*_1,*_2,\cdots,*_m$ 都是封闭的,则称$(B,*_1,*_2,\cdots,*_m)$是 X 的子代数系统,简称子代数.

§1.3 格

1.3.1 偏序关系

定义 1.3.1 设 X,Y 是两个非空集合,X 和 Y 的直积 $X\times Y$ 的任何一个子集都称为 X 到 Y 的一个二元关系,简称为 X 到 Y 的一个关系,记为 $R,S,\cdots$.

对于 $x\in X,y\in Y$,若 x 和 y 有关系 R,记为$(x,y)\in R$ 或 xRy.

一般地,若 R 是 n 维直积 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的一个子集,则称 R 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 之间的一个 n 元关系.若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有关系 R,记为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R$.

特别地,$X_1=X_2=\cdots=X_n=X$,称 R 是 X 中的一个 n 元关系.

下面我们主要研究二元关系.

$\forall x\in X,(x,x)\in R$,且 $\forall x,y\in X$,若 $x\neq y$,$(x,y)\notin R$,则称 R 是 X 中的恒等关系,记为 I_X.而 $X^2=X\times X$ 称为全关系.

用 $P(X\times Y)$表示 X 到 Y 的关系全体,即 $X\times Y$ 的幂集.若 $R\in P(X\times Y)$,则 R 是 X 到 Y 的一个关系.由于关系是集合,所以关系之间有并、交、余运算.若 $R,S\in P(X\times Y)$,则 $R\cup S,R\cap S,R'$分别表示关系 R 和 S 的并、交和 R 的余关系.

定义 1.3.2 设 X,Y,Z 是非空集合,$R\in P(X\times Y)$,$S\in P(Y\times Z)$.

(1)关系 $R^{-1}\triangleq\{(y,x)\mid(x,y)\in R\}$称为 R 的逆关系;

(2)关系 $R\circ S=\{(x,z)\mid\exists y\in Y,(x,y)\in R,(y,z)\in S\}$称为 R 和 S 的复合关系或合成关系.

特别地,若 R 是 X 中的关系,记 $R\circ R=R^2$,$R\circ R\circ R=R^2\circ R=R^3,\cdots$.

定义 1.3.3 设 R 是 X 中的一个关系,若 R 满足:

(1)自反性,$\forall x\in X,(x,x)\in R$,即 $I_X\subseteq R$;

(2)反对称性，$\forall x,y\in X$，若$(x,y)\in R,(y,x)\in R$，则$x=y$，即$R\cap R^{-1}\subseteq I_X$；

(3)传递性，$\forall x,y,z\in R$，若$(x,y)\in R,(y,z)\in R$，则$(x,z)\in R$，即$R^2\subseteq R$.

若R满足(1)和(3)，则称R是X中的拟序关系；

若R满足(1)，(2)和(3)，则称R是X中的偏序关系，记为"$\leqslant$"；称$(X,\leqslant)$为一个偏序集. $\forall x,y\in X$，若$x\leqslant y$，对偶地记为$y\geqslant x$.

定义 1.3.4 设$(X,\leqslant)$是偏序集，若"$\leqslant$"满足：$\forall x,y\in X$，$x\leqslant y$与$y\leqslant x$必有一个成立，则称$(X,\leqslant)$是全序集或线性序集.

例 1.3.1 设$X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，R_1是X中的小于或等于关系，则(X,R_1)是偏序集，而且是全序集；若R_2是X中的整除关系，则(X,R_2)为偏序集，但不是全序集. 如图1.1所示.

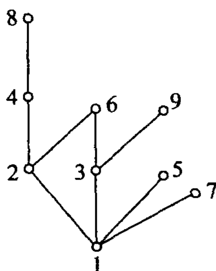


图 1.1

定义 1.3.5 设$(X,\leqslant)$是偏序集.

(1)若$\exists a\in X,\forall x\in X$，均有$x\leqslant a$，则称$a$是$X$的最大元；

(2)若$\exists b\in X,\forall x\in X$，均有$b\leqslant x$，则称$b$是$X$的最小元.

一般地，偏序集中不一定存在最大元和最小元. 例如，$X=(0,1)$在小于或等于关系下无最大元和最小元. 但是偏序集$(X,\leqslant)$中若存在最大元或最小元，则最大元和最小元是唯一的. 事实上，假若a,b均为X的最大元，则$a\leqslant b,b\leqslant a$，由反对称性$a=b$，所以最大元唯一，同理最小元也唯一.

通常，若偏序集$(X,\leqslant)$有最大元，记为1；若偏序集$(X,\leqslant)$有最小元，记为0.

定义 1.3.6 设$(X,\leqslant)$是偏序集.

(1)若$\exists a\in X,\forall x\in X$，若$a\leqslant x$，则$a=x$，则称$a$为$X$的极大元；

(2)若$\exists b\in X,\forall x\in X$，若$x\leqslant b$，则$b=x$，则称$b$为$X$的极小元.

显然，最大元一定是极大元，最小元一定是极小元，反之不一定.

定义 1.3.7 设$(X,\leqslant)$是偏序集，$A\subseteq X$.

(1)若$\exists a\in X,\forall x\in A$都有$x\leqslant a$，则称$a$为$A$的一个上界；$A$的上界集合中的最小元称为$A$的最小上界或上确界，记为$\sup A$，$\vee A$或$\bigvee\limits_{x\in A}x$；

(2)若$\exists b\in X,\forall x\in A$都有$b\leqslant x$，则称$b$为$A$的一个下界；$A$的下界集合中的

最大元称为 A 的最大下界或下确界,记为 $\inf A$, $\wedge A$ 或 $\bigwedge\limits_{x\in A} x$.

注:若 A 有上确界或下确界,上确界和下确界是唯一的,但它们不一定属于 A.

特别地,两个元素 a,b 的上确界记为 $a\vee b$,下确界记为 $a\wedge b$.

定理 1.3.1 设$(X,\leqslant)$是偏序集,$\forall a,b,c,d\in X$,则上确界、下确界满足:

(1)$a\leqslant a\vee b, b\leqslant a\vee b; a\wedge b\leqslant a, a\wedge b\leqslant b$;

(2)$a\leqslant b, \Leftrightarrow a\wedge b=a\Leftrightarrow a\vee b=b$;

(3)$a\leqslant b, c\leqslant d\Rightarrow a\wedge c\leqslant b\wedge d, a\vee c\leqslant b\vee d$.

用上确界、下确界的定义容易证明,从略.

1.3.2 格

定义 1.3.8 设$(L,\leqslant)$是偏序集,若 $\forall x,y\in L$,均有 $x\wedge y\in L, x\vee y\in L$,则称$(L,\leqslant)$是格.

由于格 L 中的取上确界、下确界可以看做 L 中的两个二元运算,所以格是一个代数系统$(L,\wedge,\vee)$.

定理 1.3.2 作为代数系统的格$(L,\wedge,\vee)$满足:

(1)幂等律:$\forall a\in L, a\wedge a=a, a\vee a=a$;

(2)交换律:$\forall a,b\in L, a\wedge b=b\wedge a, a\vee b=b\vee a$;

(3)吸收律:$\forall a,b\in L, a\wedge(a\vee b)=a, a\vee(a\wedge b)=a$;

(4)结合律:$\forall a,b,c\in L, a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c, a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$.

证明 (1)由定理 1.3.1 知 $a\wedge a\leqslant a$;又 $a\leqslant a$,则 $a\leqslant a\wedge a$,故 $a\wedge a=a$,同理 $a\vee a=a$.

(2)由上确界、下确界的定义直接可得.

(3)由定理 1.3.1 知,$a\wedge(a\vee b)\leqslant a$;又 $a\leqslant a, a\leqslant a\vee b$,则 $a\leqslant a\wedge(a\vee b)$,故 $a\wedge(a\vee b)=a$,同理 $a\vee(a\wedge b)=a$.

(4)由定理 1.3.1 知,$a\wedge(b\wedge c)\leqslant a, a\wedge(b\wedge c)\leqslant b\wedge c\leqslant b$,故 $a\wedge(b\wedge c)\leqslant a\wedge b$;又 $a\wedge(b\wedge c)\leqslant b\wedge c\leqslant c$,则 $a\wedge(b\wedge c)\leqslant(a\wedge b)\wedge c$. 同理,$(a\wedge b)\wedge c\leqslant a\wedge(b\wedge c)$,所以 $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$. 同理 $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$.

定理 1.3.3 设$(L,\wedge,\vee)$是代数系统,若 L 满足:(1)交换律,(2)吸收律,(3)结合律,则在 L 中定义关系 $a\leqslant b\Leftrightarrow a\vee b=b(a\wedge b=a)$,则$(L,\leqslant)$是格.

证明 首先证明幂等律,由吸收律知

$$a\wedge a=a\wedge(a\vee(a\wedge b))=a,\quad a\vee a=a\vee(a\wedge(a\vee b))=a.$$

现证$(L,\leqslant)$是偏序集.

由幂等律 $a\vee a=a$,则 $a\leqslant a$,即满足自反性. 若 $a\leqslant b, b\leqslant a$,则 $a\vee b=b, b\vee a=a$,由交换律 $a\vee b=b\vee a$,所以 $a=b$,即满足反对称性. 若 $a\leqslant b, b\leqslant c$,则 $a\vee b=b$, $b\vee c=c$,又 $a\vee c=a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c=b\vee c=c$,故 $a\leqslant c$,即满足传递性,所以$(L,\leqslant)$是偏序集.

再证当 $a\leqslant b$ 时，$a\vee b=b$ 与 $a\wedge b=a$ 等价. 事实上，若 $a\vee b=b$，则由吸收律 $a\wedge b=a\wedge(a\vee b)=a$；反之若 $a\wedge b=a$，则

$$a\vee b=(a\wedge b)\vee b=b\vee(b\wedge a)=b.$$

最后证 $a\vee b$，$a\wedge b$ 分别是 a 和 b 的上确界、下确界.

由于 $a\vee(a\vee b)=(a\vee a)\vee b=a\vee b$，则 $a\leqslant a\vee b$，同理 $b\leqslant a\vee b$，故 $a\vee b$ 是 a 和 b 的上界；又设 c 也是 a 和 b 的上界，则 $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)=a\vee c=c$，则 $a\vee b\leqslant c$，故 $a\vee b$ 是 a 和 b 的上确界，同理证 $a\wedge b$ 是 a 和 b 的下确界，所以 $(L,\leqslant)$ 是格.

由此得格的代数系统定义.

定义 1.3.9　设 $(L,\wedge,\vee)$ 是代数系统，若二元运算"$\wedge$"和"$\vee$"满足：$\forall a,b,c\in L$.

(1) 交换律：$a\wedge b=b\wedge a$，$a\vee b=b\vee c$；

(2) 吸收律：$a\wedge(a\vee b)=a$，$a\vee(a\wedge b)=a$；

(3) 结合律：$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$，$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$.

则称 L 是格.

在格中极大元一定是最大元，极小元一定是最小元. 事实上，设 a 是 L 中的极大元，不是最大元，则 $\exists x\in L$，$x\not\leqslant a$，则 $a\vee x\neq a$，又 $a\leqslant a\vee x\in L$，故 $a<a\vee x$，这与 a 是极大元矛盾，所以 a 是 L 的最大元. 极小元的情况同理可证.

定理 1.3.4　设 $(L,\wedge,\vee)$ 是格，则 $\forall a,b,c\in L$，有

(1)
$$a\wedge(b\vee c)\geqslant(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\tag{1.21}$$

(2)
$$a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)\tag{1.22}$$

证明　只证(1)，同理可以证(2).

(1) 由 $a\wedge b\leqslant a$，$a\wedge c\leqslant a$ 得 $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\leqslant a$；又由 $a\wedge b\leqslant b\leqslant b\vee c$，$a\wedge c\leqslant c\leqslant b\vee c$ 得 $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\leqslant b\vee c$，故

$$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\leqslant a\wedge(b\vee c).$$

定理 1.3.4 说明在格中 $\vee$ 和 $\wedge$ 相互不满足分配律.

若 $a\leqslant c$，则由式(1.22)得

$$a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c\tag{1.23}$$

称为模不等式.

定义 1.3.10　设 f 是含有格中元素以及符号 $=$，$\leqslant$，$\geqslant$，$\wedge$ 和 $\vee$ 的公式，令 f^* 是将 f 中 $\leqslant$ 替换为 $\geqslant$，$\geqslant$ 替换为 $\leqslant$，$\wedge$ 替换为 $\vee$，$\vee$ 替换为 $\wedge$ 所得到的公式，则称 f^* 是 f 的对偶公式.

例如，f 为 $a\wedge(b\vee c)\leqslant a\vee c$，则 f^* 为 $a\vee(b\wedge c)\geqslant a\wedge c$.

根据偏序关系的性质不难证明格的对偶性质，即格的对偶原理.

定理 1.3.5　设 f 是含有格中元素及符号 $=$，$\leqslant$，$\geqslant$，$\wedge$，$\vee$ 的公式，若 f 对一切格为真，则 f 的对偶公式 f^* 也对一切格为真.

例如，对一切格 $\forall a,b\in L, a\wedge b\leqslant a$ 为真，则对一切格 $\forall a,b\in L, a\vee b\geqslant a$ 为真.

由此应用格的对偶原理，在证明格的性质时，只须证明两个对偶命题中的一个命题就可以了.

1.3.3 子格及格同态

定义 1.3.11 设 $(L,\wedge,\vee)$ 是格，若 L 的非空子集 S 关于 $\wedge$，$\vee$ 运算封闭，即 $\forall a,b\in S, a\vee b\in S, a\wedge b\in S$，则称 S 是 L 的子格.

注：对于格 $(L,\leqslant)$ 的子集 S 中，虽然 S 的偏序关系是由 L 的偏序关系诱导的，但 S 中的元素 a,b 在 S 中的上确界、下确界不一定与它们在 L 中的上确界、下确界一致，这时 S 虽然是格，但不能看做 L 的子格.

例 1.3.2 设格 L(如图 1.2 所示)，$S_1=\{c,e,f,g\}$ 是 L 的子格，但 $S_2=\{a,e,f,g\}$ 不是 L 的子格，因为 $e\wedge f=c\notin S_2$，故 S_2 不是 L 的子格.

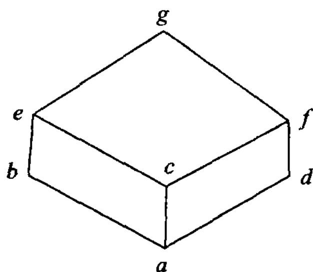


图 1.2

定义 1.3.12 设 $(L_1,\wedge_1,\vee_1)$ 和 $(L_2,\wedge_2,\vee_2)$ 是格，映射 $\varphi:L_1\to L_2$ 满足：$\forall a,b\in L$，有

(1) $$\varphi(a\wedge_1 b)=\varphi(a)\wedge_2\varphi(b) \tag{1.24}$$

(2) $$\varphi(a\vee_1 b)=\varphi(a)\vee_2\varphi(b) \tag{1.25}$$

满足式(1.24)的称为保交映射，满足式(1.25)的称为保并映射，满足式(1.24)，式(1.25)的称为格同态映射；简称为同态映射. 若 φ 是单射，称为单同态；若 φ 是满射，称为满同态；若 φ 是双射，称 φ 是同构映射，也称 L_1 和 L_2 格同构，简称同构，记为 $L_1\cong L_2$.

定理 1.3.6 设 φ 是格 $(L_1,\leqslant_1)$ 到格 $(L_2,\leqslant_2)$ 的映射.

(1)若 φ 是保并(交)映射，则 φ 是保序映射，即 $\forall a,b\in L$，有

$$a\leqslant_1 b\Rightarrow\varphi(a)\leqslant_2\varphi(b) \tag{1.26}$$

(2)若 φ 是双射，则 φ 是同构映射的充要条件为 $\forall a,b\in L_1$，有

$$a\leqslant_1 b\Leftrightarrow\varphi(a)\leqslant_2\varphi(b) \tag{1.27}$$

注：满足式(1.27)的双射 φ 称为序同构.

证明 (1)由定理 1.3.1 知，$a\leqslant_1 b\Leftrightarrow a\vee_1 b=b$，又 φ 是同态映射，则 $\varphi(b)=$

$\varphi(a\vee_1 b)=\varphi(a)\vee_2\varphi(b)$，故 $\varphi(a)\leqslant_2\varphi(b)$，所以 φ 是保序映射.

(2)充分性，只须证 φ 是同态映射即可.

令 $a\vee_1 b=c$，则 $a\leqslant_1 c$，$b\leqslant_1 c$，所以 $\varphi(a)\leqslant_2\varphi(c)$，$\varphi(b)\leqslant_2\varphi(c)$，从而 $\varphi(a)\vee_2\varphi(b)\leqslant_2\varphi(c)=\varphi(a\vee_1 b)$. 另外，由 $\varphi(a)\vee_2\varphi(b)\in L_2$ 和 φ 是满射知，$\exists d\in L_1$，使得 $\varphi(d)=\varphi(a)\vee_2\varphi(b)$，从而 $\varphi(a)\leqslant_2\varphi(d)$，$\varphi(b)\leqslant_2\varphi(d)$，由已知条件得，$a\leqslant_1 d$，$b\leqslant_1 d$，从而 $a\vee_1 b\leqslant_1 d$，再由已知条件得 $\varphi(a\vee_1 b)\leqslant\varphi(d)=\varphi(a)\vee_2\varphi(b)$，所以，$\varphi(a\vee_1 b)=\varphi(a)\vee_2\varphi(b)$，同理可证 $\varphi(a\wedge_1 b)=\varphi(a)\wedge_2\varphi(b)$.

必要性，由(1)的结论知 $a\leqslant_1 b\Rightarrow\varphi(a)\leqslant_2\varphi(b)$；若 $\varphi(a)\leqslant_2\varphi(b)$，则 $\varphi(a)\vee_2\varphi(b)=\varphi(b)$. 由于 φ 是同构映射，则 $\varphi(a\vee_1 b)=\varphi(a)\vee_2\varphi(b)=\varphi(b)$，又由于 φ 是双射，必有 $a\vee_1 b=b$，从而 $a\leqslant_1 b$，即证明了 $\varphi(a)\leqslant_2\varphi(b)\Rightarrow a\leqslant_1 b$.

综上所述，$a\leqslant_1 b\Leftrightarrow\varphi(a)\leqslant_2\varphi(b)$.

注意，定理 1.3.6 中(1)的逆命题不一定成立，即若 φ 是 L_1 到 L_2 的保序映射，未必有 φ 是 L_1 到 L_2 的同态映射，但(2)说明，若 φ 是双射，则保序与同态是等价的，即序同构与格同构等价.

例 1.3.3　设 $L=\{a,b,c,d,e\}$，L 的偏序图如图 1.3 所示，则 $(L,\leqslant)$ 是格. 令 $L'=\{P(L),\subseteq\}$，则 L' 也是格，命映射 $\varphi:L\to L'$ 为：$\forall x\in L$，$x\to\varphi(x)=\{y\mid y\in L,y\leqslant x\}$，则 $\varphi(a)=L$，$\varphi(b)=\{b,e\}$，$\varphi(c)=\{c,e\}$，$\varphi(d)=\{d,e\}$，$\varphi(e)=\{e\}$，$\forall x,y\in L$，$x\leqslant y$ 时，显然有 $\varphi(x)\subseteq\varphi(y)$，即 φ 是格 L 到 L' 的保序映射，但是，在 L 中 $b\vee c=a$，故 $\varphi(b\vee c)=\varphi(a)=L$，而 $\varphi(b)\vee\varphi(c)=\{b,e\}\vee\{c,e\}=\{b,c,e\}$，所以 $\varphi(b\vee c)\neq\varphi(b)\cup\varphi(c)$，即 φ 不是 L 到 L' 的同态映射.

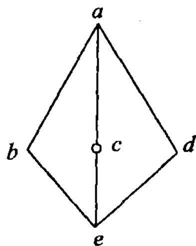


图 1.3

1.3.4　格的直积

定义 1.3.13　设 $(L_1,\leqslant_1)$ 和 $(L_2,\leqslant_2)$ 是偏序集，定义 $L_1\times L_2$ 中的序关系为：$\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in L_1\times L_2$.

$$(a_1,a_2)\leqslant(b_1,b_2)\Leftrightarrow a_1\leqslant_1 b_1,a_2\leqslant_2 b_2\tag{1.28}$$

则 $(L_1\times L_2,\leqslant)$ 是偏序集，且称为偏序集 L_1 和 L_2 的直积.

定理 1.3.7　设 $(L_1,\wedge_1,\vee_1)$ 和 $(L_2,\wedge_2,\vee_2)$ 是格，则 $\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in$

$L_1 \times L_2$,定义

$$(a_1,a_2) \wedge (b_1,b_2) = (a_1 \wedge_1 b_1, a_2 \wedge_2 b_2) \tag{1.29}$$

$$(a_1,a_2) \vee (b_1,b_2) = (a_1 \vee_1 b_1, a_2 \vee_2 b_2) \tag{1.30}$$

则$(L_1 \times L_2, \wedge, \vee)$是格.

事实上,由于$\wedge_1$,$\vee_1$和$\wedge_2$,$\vee_2$满足交换律,吸收律,结合律,则容易验证$\wedge$、$\vee$也满足交换律,吸收律和结合律,所以$(L_1 \times L_2, \wedge, \vee)$是格.

定义 1.3.14 设$(L_1, \wedge_1, \vee_1)$和$(L_2, \wedge_2, \vee_2)$是格,在$L_1 \times L_2$中由式(1.29)和式(1.30)定义运算$\wedge$和$\vee$,则称$(L_1 \times L_2, \wedge, \vee)$是格$L_1$和$L_2$的直积.

格的直积概念很容易推广到n个格的直积上去.

定理 1.3.8 设$(L_1, \leqslant_1)$和$(L_2, \leqslant_2)$是格,则格$L_1 \times L_2$中的序关系与式(1.28)定义的序关系一致.

证明 $\forall (a_1,a_2),(b_1,b_2) \in L_1 \times L_2$,

$(a_1,a_2) \leqslant (b_1,b_2) \Leftrightarrow (a_1,a_2) \vee (b_1,b_2) = (b_1,b_2) \Leftrightarrow (a_1 \vee_1 b_1, a_2 \vee_2 b_2) = (b_1,b_2) \Leftrightarrow a_1 \vee_1 b_1 = b_1\ a_2 \vee_2 b_2 = b_2 \Leftrightarrow a_1 \leqslant_1 b_1, a_2 \leqslant_2 b_2$

故
$$(a_1,a_2) \leqslant (b_1,b_2) \Leftrightarrow a_1 \leqslant_1 b_1, a_2 \leqslant_2 b_2.$$

§1.4 模格与分配格

在格中一般只满足分配不等式式(1.21)和式(1.22),而不满足分配律.

例 1.4.1 如图 1.4 的钻石格和图 1.5 的五角格都不满足分配律.

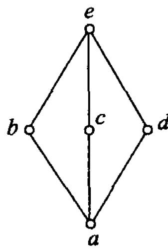


图 1.4

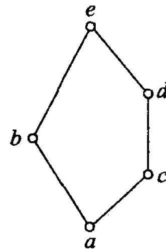


图 1.5

在图 1.4 中,$b \wedge (c \vee d) = b \wedge e = b$,$(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a$,故

$$b \wedge (c \vee d) \neq (b \wedge c) \vee (b \wedge d).$$

在图 1.5 中,$c \vee (b \wedge d) = c \vee a = c$,$(c \vee b) \wedge (c \vee d) = e \wedge d = d$,故

$$c \vee (b \wedge d) \neq (c \vee b) \wedge (c \vee d)$$

定义 1.4.1 设$(L, \wedge, \vee)$是格,若$\forall a,b,c \in L$,有分配律

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{1.31}$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \tag{1.32}$$

则称 L 是分配格.

定义 1.4.2　设$(L,\wedge,\vee)$是格,若 $\forall a,b,c\in L,a\leqslant c$ 时,有

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge c \tag{1.33}$$

则称 L 是模格,也称式(1.33)为模律.

容易验证,图 1.4 所示的钻石格是模格. 图 1.5 所示的五角格不是模格,因为当 $c<d$ 时,有

$$c=c\vee(b\wedge d)\neq(c\vee b)\wedge d=d.$$

定理 1.4.1　分配格是模格.

证明　由分配律知,$\forall a,b,c\in L,a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$,若 $a\leqslant c$,则

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge c$$

所以 L 是模格.

定理 1.4.2　设 L 是格,则 L 是模格的充分必要条件是 L 没有子格与图 1.5 所示的五角格同构.

证明　必要性,假若 L 有子格与图 1.5 所示的五角格同构,则 L 中与 b,c,d 对应的元素不满足模律,所以 L 不是模格,由此 L 没有与图 1.5 所示的五角格同构的子格.

充分性,假若 L 不是模格,则由模不等式 $\exists a,b,c,\in L$,当 $a<c$ 时,有

$$a\vee(b\wedge c)<(a\vee b)\wedge c$$

令
$$x=a\vee(b\wedge c),\quad y=(a\vee b)\wedge c$$

则
$$b\wedge c<x<y<a\vee b,\quad b\wedge c<b<a\vee b$$

而且
$$x\vee b=(a\vee(b\wedge c)\vee b=a\vee b,\quad y\vee b\geqslant x\vee b=a\vee b$$

又 $y<a\vee b$,则 $y\vee b\leqslant a\vee b$,所以 $y\vee b=a\vee b$.

$$y\wedge b=((a\vee b)\wedge c)\wedge b=(a\vee b)\wedge b\wedge c=b\wedge c$$

$$x\wedge b\leqslant y\wedge b=b\wedge c$$

又 $x>b\wedge c$,则 $x\wedge b\geqslant b\wedge c$,所以 $x\wedge b=b\wedge c$.

由此格 L 的子集 $S=\{b\wedge c,x,y,b,a\vee b\}$ 关于 $\wedge$,$\vee$ 封闭,而 S(见图 1.6)与图 1.5 所示的五角格同构. 从而与假设矛盾,所以 L 是模格.

引理 1.4.1　在格中分配律与下式等价,$\forall a,b,c\in L$　有

$$(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)=(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a) \tag{1.34}$$

证明　必要性,设 L 有分配律,则

$$\begin{aligned}(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)&=((a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge c)\vee((a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge a)\\&=((a\vee b)\wedge c)\vee((b\vee c)\wedge a)\\&=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)\vee(b\wedge a)\vee(c\wedge a)\\&=(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\end{aligned}$$

充分性,设式(1.34)成立,先证 L 是模格,设 $a\leqslant c$,则式(1.34)中

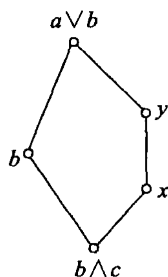


图 1.6

$$左端=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge c=(a\vee b)\wedge c$$
$$右端=(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee a=a\vee(b\wedge c)$$

即,$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge c$,故 L 是模格,令式(1.34)的右端为 u,左端为 v,利用模律

$$\begin{aligned} a\wedge u &= a\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)) \\ &= (((a\wedge b)\vee(b\wedge c))\wedge a)\vee(c\wedge a) \\ &= (a\wedge b)\vee(b\wedge c\wedge a)\vee(a\wedge c) \\ &= (a\wedge b)\vee(a\wedge c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\wedge v &= a\wedge(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a) \\ &= a\wedge(b\vee c) \end{aligned}$$

由 $u=v$,则 $a\wedge u,=a\wedge v$,从而 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$,由格的对偶性,有

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

所以 L 是分配格.

定理 1.4.3 设 L 是模格,L 是分配格的充分必要条件是 L 没有子格与图 1.4 所示的钻石格同构.

证明 必要性,假若 L 有子格与图 1.4 所示的钻石格同构,则 L 中与图 1.4 中的 b,c,d 对应的元素不满足分配律,所以 L 不是分配格,与条件矛盾,所以 L 没有子格与图 1.4 所示的钻石格同构.

充分性,假若 L 不是分配格,则由分配不等式和引理 1.4.1 知,$\forall a,b,c\in L$ 有

$$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)<(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$$

令

$$l=(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$$
$$r=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$$
$$x=(r\wedge a)\vee l,\quad y=(r\wedge b)\vee l,\quad z=(r\wedge c)\vee l$$

显然 $l\leqslant x,l\leqslant y,l\leqslant z,l<r$.

若 $r<x$,则 $x=r\vee x=r\vee(r\wedge a)\vee l=r\vee l=r$,与 $r<x$ 矛盾,故 $x\leqslant r$.

同理证 $y\leqslant r, z\leqslant r$，由此得

$$l\leqslant x\leqslant r,\quad l\leqslant y\leqslant r,\quad l\leqslant z\leqslant r$$

又 $x\vee y=(r\wedge a)\vee l\vee(r\wedge b)\vee l$

$=((a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)\wedge a)\vee((a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)\wedge b)\vee l$

$=(a\wedge(b\vee c))\vee l\vee(b\wedge(a\vee c))$

$=(a\wedge(b\vee c)\vee(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\vee(b\wedge(a\vee c))$

$=(a\wedge(b\vee c)\vee(b\wedge(a\vee c)$

因为 $a\wedge(b\vee c)\leqslant a\wedge c$，则由模律得

$x\vee y=((a\wedge(b\vee c))\vee b)\wedge(a\vee c)=(b\vee(a\wedge(b\vee c))\wedge(a\vee c)$

因为 $b\leqslant(b\vee c)$，则由模律得

$$x\vee y=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(a\vee c)=r.$$

同理证，$x\vee z=r, y\vee z=r$. 由于 $l<r$，则由模律

$$x=l\vee(a\wedge r)=(l\vee a)\wedge r.$$

同理，$y=(l\vee b)\wedge r, z=(l\vee c)\wedge r$，可以验证

$$x\wedge y=x\wedge z=y\wedge z=l.$$

所以 $S=\{l,x,y,z,r\}$ 关于 $\wedge$，$\vee$ 两种运算封闭，而且 L 的子格 S(见图 1.7)与图 1.4 所示的钻石格同构，从而与假设矛盾，所以 L 是分配格.

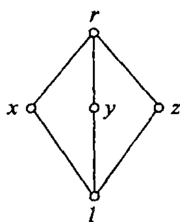


图 1.7

推论 1.4.1　格 L 是分配格的充分必要条件是 L 中没有子格与图 1.4 和图1.5 所示的钻石格和五角格同构.

例 1.4.2　如图 1.8 中的三个格均不是分配格.

(1)中含有与钻石格同构的子格 $\{a,b,c,d,e\}$；

(2)中含有与五角格同构的子格 $\{a,b,c,e,f\}$；

(3)中含有与钻石格同构的子格 $\{a,b,c,e,f\}$.

所以图 1.8 中(1)，(2)，(3)三个格均不是分配格.

推论 1.4.2　(1)小于五元的格都是分配格；

(2)任何一条链(全序格)都是分配格.

定理 1.4.4　设 L 是格，则 L 是分配格的充分必要条件是 $\forall a,b,c\in L$，有消

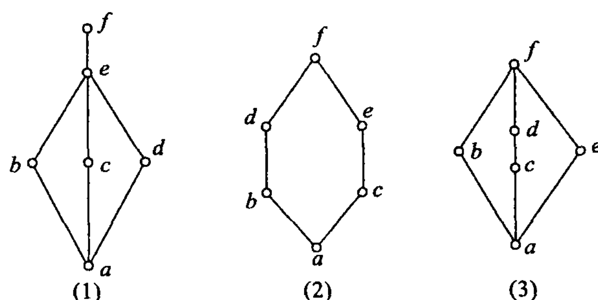


图 1.8

去律

$$a \wedge b = a \wedge c, \quad a \vee b = a \vee c \Rightarrow b = c \tag{1.35}$$

证明 必要性

$b = b \vee (b \wedge a) = b \vee (a \wedge b) = b \vee (a \wedge c) = (b \vee a) \wedge (b \vee c)$

$= (a \vee b) \wedge (b \vee c) = (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c = (a \wedge c) \vee c = c.$

充分性,假若 L 不是分配格,则由推论 1.4.1 知,L 中必含有与钻石格或五角格同构的子格,设 L 中含有与钻石格同构的子格 $\{a,b,c,d,e\}$(如图 1.4),则 $b \wedge c = b \wedge d = a, b \vee c = b \vee d = e$,但 $c \neq d$,与已知条件矛盾. 又设 L 中含有与五角格同构的子格 $\{a,b,c,d,e\}$(如图 1.5),则 $b \wedge c = b \wedge d = a, b \vee c = b \vee d = e$,但 $c \neq d$,与已知条件矛盾,所以 L 是分配格.

§1.5 布 尔 格

1.5.1 有补格

定义 1.5.1 设 L 是格,若 L 中存在最大元 1_L,简记为 1;存在最小元 0_L,简记为 0,则称 L 是有界格. 记为 $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$.

显然,有限格一定是有界格,若 $L = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,则

$$0 = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n, \quad 1 = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n.$$

定理 1.5.1 设 $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ 是有界格,则 L 满足:$\forall a \in L$,有:

(1)同一律 $a \wedge 1 = a, \quad a \vee 0 = a$ (1.36)

(2)两极律 $a \vee 1 = 1, \quad a \wedge 0 = 0$ (1.37)

定理的结论是显然的.

定义 1.5.2 设 $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ 是有界格,若 $\forall a \in L, \exists b \in L$ 使得

$$a \wedge b = 0, \quad a \vee b = 1 \tag{1.38}$$

则称 b 是 a 的补元，记为 a'，同样 a 也是 a' 的补元，即 a 与 a' 互补，称式(1.38)为补余律.

在有界格中，最大元 1 和最小元 0 互补，但其他元不一定有补元，而且，有补元也不一定唯一. 例如，图 1.9 中，c 无补元，而 d 有两个补元 b,e. 但对于有界分配格，如果某元有补元，则补元一定唯一.

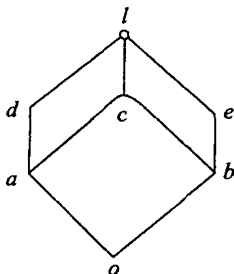


图 1.9

定理 1.5.2　设$(L,\wedge,\vee,0,1)$是有界分配格，则 $\forall a\in L$，若 a 有补元 a'，则 a' 是 a 的唯一补元.

证明　假若 $b\in L$ 也是 a 的补元，则 $a\wedge b=0, a\vee b=1$，又 $a\wedge a'=0, a\vee a'=1$，故 $a\wedge b=a\wedge a', a\vee b=a\vee a'$，由消去律 $b=a'$，所以 a 的补元唯一.

定义 1.5.3　若有界格 L 的任何元都有补元，则称 L 是有补格.

由于有补分配格中，每一元有且仅有一个补元，所以有补分配格中求补可以看做一元运算.

定理 1.5.3　有补分配格满足：$\forall a,b\in L$

(1)对偶律　$$(a\wedge b)'=a'\vee b',(a\vee b)'=a'\wedge b' \tag{1.39}$$

(2)对合律　$$(a')'=a \tag{1.40}$$

证明　(1)　$(a\wedge b)\vee(a'\vee b')=(a\vee a'\vee b')\wedge(b\vee a'\vee b')=1\wedge 1=1$

$(a\wedge b)\wedge(a'\vee b')=(a\wedge b\wedge a')\vee(a\wedge b\wedge b')=0\wedge 0=0$

故$(a\wedge b)'=a'\vee b'$. 同理证$(a\vee b)'=a'\wedge b'$.

(2)由于 $a\wedge a'=0, a\vee a'=1$，故$(a')'=a$.

1.5.2　布尔格

定义 1.5.4　有补分配格称为布尔格，或称为布尔代数，记为

$$(B,\wedge,\vee,',0,1).$$

由此，布尔格满足：(1)幂等律，(2)交换律，(3)吸收律，(4)结合律，(5)分配律，(6)同一律，(7)两极律，(8)对偶律，(9)对合律，(10)补余律.

例 1.5.1　设 X 是集合，则幂集格$(P(X),\cap,\cup,',\varnothing,X)$是布尔格，称为集合

代数.

定义 1.5.5 设$(B,\wedge,\vee,',0,1)$是布尔格,$S\subseteq B$. 若$0,1\in S$,且S对运算"$\wedge$","$\vee$","$'$"封闭,则称S是B的子布尔格.

例 1.5.2 设$(B,\wedge,\vee,',0,1)$是布尔格$a,b\in B$,且$a<b$,则

$$S=\{x\mid x\in B,a\leqslant x\leqslant b\}$$

称S为B中的区间,记为$[a,b]$. 其中最大元为b,最小元为a. 不难验证在S中,$\forall x\in S$,x关于最大元b和最小元a的补元为$y=(a\vee x')\wedge b$,即$x\wedge y=a$,$x\vee y=b$,则$(S,\wedge,\vee,',a,b)$是布尔格. 但S不是B的子布尔格. 仅当$a=0,b=1$时,S才是B的子布尔格.

定义 1.5.6 设$(B_1,\wedge_1,\vee_1,',0,1)$和$(B_2,\wedge_2,\vee_2,-,\theta,I)$是两个布尔格,映射$\varphi:B_1\to B_2$,若$\forall a,b\in B$,有

$$\varphi(a\wedge_1 b)=\varphi(a)\wedge_2(b)$$
$$\varphi(a\vee_1 b)=\varphi(a)\vee_2(b)$$
$$\varphi(a')=\varphi(\overline{a})$$

则称φ是B_1到B_2的同态映射,简称B_1和B_2同态. 若φ是单射,称单同态;若φ是满射,称满同态;若φ是双射,称同构,此时记为$B_1\cong B_2$.

定义 1.5.7 设L是格,$0\in L,a\in L,a\neq 0$,若$\forall b\in L$有

$$0<b\leqslant a\Rightarrow a=b \tag{1.41}$$

则称a是L的原子.

例如,图 1.9 中,a,b,c是原子.

定理 1.5.4 设L是格,$\forall a,b\in L$是L中的原子,若$a\neq b$,则$a\wedge b=0$.

证明 假若$a\wedge b\neq 0$,则有$0<a\wedge b\leqslant a$和$0<a\wedge b\leqslant b$,由于a,b是原子,则有$a\wedge b=a$和$a\wedge b=b$,从而$a=b$与已知条件矛盾,故$a\wedge b=0$.

定理 1.5.5 设B是布尔格,$\forall a,b\in L$,则

$$a\leqslant b\Leftrightarrow a\wedge b'=0 \tag{1.42}$$

证明 必要性,设$a\leqslant b$,则$a\wedge b=a$,由此

$$a\wedge b'=(a\wedge b)\wedge b'=a\wedge(b\wedge b')=a\wedge 0=0.$$

充分性,若$a\wedge b'=0$,则

$$a=a\wedge 1=a\wedge(a\wedge b')'=a\wedge(a'\vee b)=(a\wedge a')\vee(a\wedge b)=a\wedge b,$$

故$a\leqslant b$.

定理 1.5.6 设B是有限布尔格,$\forall x\in B,x\neq 0$,则B中有原子a,使$a\leqslant x$.

证明 若x是原子,则结论成立. 若x不是原子,由原子定义,$\exists x_1\in B$,使$0<x_1<x$,若x_1是原子,则结论成立;若x_1不是原子,则$\exists x_2\in B$,使$0<x_2<x_1<x$,由于B有限,B中不可能出现单调下降的非原子序列$x>x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots>0$,故$B$中存在原子$a$,使$a\leqslant x$.

由于布尔格至少存在一个非零元 1,所以布尔格的原子集非空,记为S.

定理 1.5.7 设 B 是有限布尔格，$\forall x\in B$，且 $x\neq 0$，则存在满足 $a_i\leqslant x(i=1,2,\cdots,n)$ 的所有原子集 $S_x=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，使 $x=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$，且这种表示方法是唯一的.

证明 首先证明 $x=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$.

令 $y=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$，则 $y\leqslant x$，假若 $y<x$，则由定理 1.5.5 知 $x\wedge y'\neq 0$，又由定理 1.5.6，存在原子 $a\in S$，$a\leqslant x\wedge y'$，从而 $a\leqslant x$，$a\leqslant y'$，由 $a\in S_x$，得 $a\leqslant y$，从而 $a\leqslant y\wedge y'=0$，与 a 是原子矛盾，故 $y=x$，即 $x=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$.

现证表达式 $x=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$ 唯一.

设 $x=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$，且 $\exists a\in S_x$，$a\leqslant x$，$a\neq a_i(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$a\wedge x=a\wedge(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n)=(a\wedge a_1)\vee(a\wedge a_2)\vee\cdots\vee(a\wedge a_n)=0$$

而 $a\wedge x=a$，则 $a=0$，故表示方法唯一.

推论 1.5.1 设 B 是有限布尔子格，S 是 B 的原子集，则 $\vee S=1$.

由于有限布尔格的任意元都可以用原子唯一表示，所以也称有限布尔格为原子格.

定理 1.5.8 有限布尔格 $(B,\wedge,\vee,',0,1)$ 和集代数 $(P(S),\cap,\cup,c,\varnothing,S)$ 同构. 其中 S 是 B 中的所有原子集.

证明 令 $g:B\rightarrow P(S)$ 为，$\forall x\in B$

$$g(x)=\begin{cases}\varnothing, & x=0\\ A_x, & x\neq 0\end{cases}$$

其中 $A_x=\{a\in S\mid a\leqslant x\}$.

显然，g 是 B 到 $P(S)$ 的双射.

$\forall x,y\in B$，假若至少有一个为 0，不妨设 $x=0$，则

$$g(x\wedge y)=g(0)=\varnothing=\varnothing\cap g(y)=g(x)\cap g(y)$$

$$g(x\vee y)=g(y)=\varnothing\cup g(y)=g(x)\cup g(y)$$

$$g(x')=g(1)=S=\varnothing^c=g(x)^c$$

故同态条件满足.

其次，设 $x\neq 0$，$y\neq 0$，令 $A_x=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$A_y=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，则

$$x=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n,\quad y=b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_m$$

由此

$$x\wedge y=(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n)\wedge(b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_m)=\bigvee_{i=1}^{n}\bigvee_{j=1}^{m}(a_i\wedge b_j)$$

由定理 1.5.4 知，当 $a_i\neq b_j$ 时，$a_i\wedge b_j=0$，故上式中非零的就是 $A_x\cap A_y$ 中 $a_i=b_j$ 的元，故

$$g(x\wedge y)=A_x\cap A_y=g(x)\cap g(y).$$

另外，$x\vee y=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n\vee b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_m$，则

$$g(x\vee y)=A_x\cup A_y=g(x)\cup g(y).$$

最后，设 $z=\bigvee_{a\in S-A_x} a$，由推论 1.5.1 及定理 1.5.4 知 $x\vee z=1, x\wedge z=0$，所以

$$x'=z, \text{故 } g(x')=g(z)=A_x^c=(g(x))^c.$$

由此同态条件满足，所以 g 是 B 到 $P(S)$ 的同构映射，即 $B\cong P(S)$.

1.5.3 软代数

定义 1.5.8 设 $(L,\leqslant)$ 是偏序集，映射 $':L\to L$ 满足：$\forall a,b\in L$，

(1) 对合对应 $(a')'=a$；

(2) 逆序对应，若

$$a\leqslant b\Rightarrow b'\leqslant a' \tag{1.43}$$

则称"$'$"是 L 中的逆序对合对应，简称伪补.

定理 1.5.9 设 L 是有最大元 1 和最小元 0 的格，"$'$"是 L 中的伪补，则 $(1)'=0,(0)'=1$.

证明 $\forall a\in L$，则 $a'\leqslant 1$，从而 $(1)'\leqslant(a')'=a$，即 $\forall a\in L,(1)'\leqslant a$，故 $(1)'$ 是最小元，即 $(1)'=0$，同理证 $(0)'=1$.

定理 1.5.10 设 L 是格，"$'$"是 L 中的伪补，则有对偶律：$\forall a,b\in L$，则

(1)
$$(a\wedge b)'=a'\vee b' \tag{1.44}$$

(2)
$$(a\vee b)'=a'\wedge b' \tag{1.45}$$

证明 (1) 因为 $a\wedge b\leqslant a, a\wedge b\leqslant b$，则 $a'\leqslant(a\wedge b)', b'\leqslant(a\wedge b)'$，从而

$$a'\vee b'\leqslant(a\wedge b)'$$

由 $a\leqslant a\vee b, b\leqslant a\vee b$ 得，$(a\vee b)'\leqslant a', (a\vee b)'\leqslant b'$，则 $(a\vee b)'\leqslant a'\wedge b'$，于是 $(a'\vee b')'\leqslant(a')'\wedge(b')'=a\wedge b$，从而 $(a\wedge b)'\leqslant((a'\vee b')')'=a'\vee b'$，所以 $(a\wedge b)'=a'\vee b'$.

同理可证 $(a\vee b)'=a'\wedge b'$.

定义 1.5.9 有伪补的有界分配格称为软代数.

由此，软代数满足：(1) 幂等律，(2) 交换律，(3) 吸收律，(4) 结合律，(5) 分配律，(6) 同一律，(7) 两极律，(8) 对偶律，(9) 对合律.

注意，软代数不满足补余律. 如果软代数满足补余律 $a\wedge a'=0, a\vee a'=1$，则软代数变为布尔代数，即是布尔格.

例 1.5.3 $([0,1],\wedge,\vee)$ 是分配格，映射 $':[0,1]\to[0,1], a\to 1-a=a'$，由于 $\forall a,b\in[0,1]$.

(1) 若 $a\leqslant b$，则 $b'=1-b\leqslant 1-a=a'$；

(2) $(a')'=(1-a)'=a$.

故"$'$"是格 $([0,1],\wedge,\vee)$ 中的伪补，但"$'$"不满足补余律，即当 $a\neq 0,1$ 时，$a\wedge a'=a\wedge(1-a)\neq 0, a\vee a'=a\vee(1-a)\neq 1$，所以，格 $([0,1],\wedge,\vee,')$ 是软代数.

§1.6　理想与滤子

设$(X,\leqslant)$是偏序集，$\forall a\in X, A\subseteq X$，记

$$\uparrow a \triangleq \{x\in X \mid a\leqslant x\} \tag{1.46}$$

$$\uparrow A \triangleq \{\uparrow a \mid a\in A\} \tag{1.47}$$

$$\downarrow a \triangleq \{x\in X \mid x\leqslant a\} \tag{1.48}$$

$$\downarrow A \triangleq \{\downarrow a \mid a\in A\} \tag{1.49}$$

定义 1.6.1　设$(X,\leqslant)$是偏序集，$\forall A\subseteq X$，若$A=\uparrow A$，则称A为上集；若$A=\downarrow A$，则称A为下集.

显然，偏序集X的子集A是一个上集的充分必要条件是$\forall a\in A, b\in X$，若$a\leqslant b$，则$b\in A$；A是下集的充分必要条件是$\forall a\in A, b\in X$，若$b\leqslant a$，则$b\in A$.

定义 1.6.2　设L是格，I是L的非空子集，若I是上定向集，即$\forall a,b\in I, a\vee b\in I$，则称$I$为$L$的理想基；若$I$是$L$的理想基又是下集，则称$I$是$L$的理想.

定义 1.6.3　设L是格，F是L的非空子集，若F是下定向集，即$\forall a,b\in F$，$a\wedge b\in F$，则称F是L的滤子基；若F是L的滤子基又是上集，则称F是L的滤子.

显然，格L的理想和滤子是L的子格.

例 1.6.1　拓扑空间的邻域系$(U(x),\cap,\cup)$是一个滤子.

例 1.6.2　设L是格，$a\in L$，若$a\neq 0$，则$\downarrow a$是L的一个理想，称为a生成的主理想；若$a\neq 1$，则$\uparrow a$是L的一个滤子，称为a生成的主滤子.

例 1.6.3　设X是非空集合，$L=P(X)$，$q\in X$，令F是包含q的X的一切子集，因为$\forall A,B\in F, A\cap B\in F$，则$F$是滤子基，$F$又是上集，所以$F$是滤子. 又令$I$是$X$的一切不包含$q$的子集族，因$\forall A,B\in I, A\cup B\in I$，故$I$是理想基，$I$又是下集，所以$I$是理想.

定理 1.6.1　设L是格，I是L的非空子集.

(1)I是L的理想当且仅当I满足：$\forall a,b\in L$

$$a\vee b\in I \Leftrightarrow a\in I,\quad b\in I;$$

(2)若I是L的子格，则I是L的理想当且仅当I满足：$\forall a\in I, b\in L$，有

$$a\wedge b\in I.$$

证明　(1)设I是理想，则I是下集，若$a\vee b\in I$，由于$a\leqslant a\vee b, b\leqslant a\vee b$，则$a\in I, b\in I$. 又若$a\in I, b\in I$，由于$I$是上定向，则$a\vee b\in I$，即$a\vee b\in I\Leftrightarrow a\in I, b\in I$.

设I满足：$a\vee b\in I\Leftrightarrow a\in I, b\in I$. 由$a\in I, b\in I\Rightarrow a\vee b\in I$知$I$是上定向集. 另外，若$a\in I, b\in L$，且$b\leqslant a$，而$a\vee b=a\in I$，则$b\in I$，即$I$是下集，所以$I$是理想.

(2)设I是L的子格，若I是L的理想，则I是下集，因$a\wedge b\leqslant a$，则$a\wedge b\in I$；反之，若I满足：$\forall a\in I, b\in L$，有$a\wedge b\in I$，则$\forall x\in L, x\leqslant a, x\wedge a=x\in I$，即$I$是下集，又$I$是子格，则$\forall a,b\in I, a\vee b\in I$，即$I$是上定向集，所以$I$是$L$的理想.

定理 1.6.2 设 L 是格，F 是 L 的非空子集.

(1) F 是 L 的滤子当且仅当 F 满足：$\forall a,b\in F$

$$a\wedge b\in F\Leftrightarrow a\in F,\quad b\in F.$$

(2) 若 F 是 L 的子格，则 F 是 L 的滤子当且仅当 F 满足 $\forall a\in F, b\in L$，有

$$a\vee b\in F.$$

证明与定理 1.6.1 类似，从略.

定理 1.6.3 设 L 是格，则 L 的任意多个理想(滤子)的非空交是 L 的理想(滤子).

证明简单，从略.

定义 1.6.4 不等于 L 的理想(滤子)称为 L 的真理想(真滤子).

显然，有最大元 1 的格的理想 I 是真理想的充分必要条件是 $1\notin I$；有最小元 0 的格的滤子 F 是真滤子的充分必要条件是 $0\notin F$.

定理 1.6.4 格 L 的任何理想(滤子)都是主理想(主滤子)的充分必要条件是 L 中没有无限长的升链(降链).

证明 设 L 的任意理想都是主理想，若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots$ 是 L 中的一个升链，令

$$I=\{x\in L\mid \exists a_i, x\leqslant a_i\}\quad (i=1,2,\cdots)$$

易见 I 是 L 的理想，因此，$\exists a\in I, I=\downarrow a$. 显然 I 包含所有的 a_i，即 $a_i\leqslant a(i=1,2,\cdots)$. 由 I 的定义知，存在某个 a_n 使 $a=a_n=a_{n+1}=\cdots$，即 L 中无无限升链.

设 L 中无无限升链，I 是 L 的任一理想，则 I 有极大元 a(否则 I 中便有无限升链)，因 I 是 L 的子格，则 a 是 I 的最大元，从而 $I=\downarrow a$.

同理证主滤子的情况.

例 1.6.4 设 X 的幂集 $P(X)$，$A\subseteq X$ 是 X 的真子集，所有与 A 不相交的 X 的子集是 $P(X)$ 的理想，且是主理想 $\downarrow(X-A)$.

定义 1.6.5 设 L 是格，I 是 L 的真理想，若 I 满足：$\forall a,b\in L$，若 $a\wedge b\in I$，则 $a\in I$ 或 $b\in I$，称 I 是 L 的素理想.

设 F 是 L 的真滤子，若 F 满足：$\forall a,b\in L$，若 $a\vee b\in F$，则 $a\in F$ 或 $b\in F$，称 F 是 L 的素滤子.

易证，格 L 的子集 I 是素理想当且仅当 $L-I$ 是 L 的素滤子.

定义 1.6.6 设 I 是格 L 的真理想，若真正包含 I 的理想只有 L，则称 I 是 L 的极大理想. 设 F 是格 L 的真滤子，若真正包含 F 的滤子只有 L，则称 F 是格 L 的极大滤子，简称超滤子.

定理 1.6.5 设 L 是有最大元 1 的分配格，则 L 中的极大理想均为素理想；对应地，有最小元 0 的分配格中，任一超滤子均为素滤子.

证明 设 I 是 L 的极大理想，$\forall a,b\in L$，若 $a\wedge b\in I$，且 $a\notin I$，现证 $b\in I$，令

$$I_a=\downarrow\{a\vee c\mid c\in I\}$$

易证 I_a 是包含 I 和 a 的理想，由于 I 是极大理想，所以 $I_a=L$，由于 $1\in L=I_a$，则存在 $d\in I, a\vee d=1$，从而 $b\vee d=(b\vee d)\wedge(a\vee d)=(a\wedge b)\vee d\in I$. 由于 $b\leqslant b\vee d$，故 $b\in I$. 所以 I 是素理想.

另一部分的证明类似.

在布尔格中有更好的结论.

定理 1.6.6　设 B 是布尔格，I 是 B 的真理想，则下列条件等价：

(1) I 是极大理想；

(2) I 是素理想；

(3) $\forall a\in B, a\in I\Leftrightarrow a'\notin I$.

证明　(1)⇒(2) 定理 1.6.5 已证.

(2)⇒(3) $\forall a\in B$，由于 $a\wedge a'=0\in I$，由 I 是素理想知，$a\in I$ 或 $a'\in I$，若 $a\in I$，且 $a'\in I$，故 $a\vee a'=1\in I$，与 I 是真理想矛盾，所以 $a'\notin I$.

(3)⇒(1)　设 J 是真包含 I 的理想，取 $a\in J-I$，则 $a'\in I\subseteq J$，因此 $a\vee a'=1\in J$，从而 $J=B$，所以 I 是极大理想.

定理 1.6.7　设 B 是布尔格，F 是 B 的真滤子，则下列条件等价：

(1) F 是极大滤子；

(2) F 是素滤子；

(3) $\forall a\in B, a\in F\Leftrightarrow a'\notin F$.

§1.7　完　备　格

定义 1.7.1　设 $(L,\leqslant)$ 是偏序集，若 L 的任意子集 A 都有上确界和下确界，即 $\sup A\in L, \inf A\in L$，则称 L 是完备格，简记 $\sup A=\vee A, \inf A=\wedge A$.

注：(1) 完备格是格；

(2) 完备格有最大元 1 和最小元 0；

(3) 在完备格中，$\vee\varnothing=0, \wedge\varnothing=1$；

(4) 在完备格中，$\forall A, B\subseteq L$，有

$$\vee(A\cup B)=(\vee A)\vee(\vee B)$$
$$\wedge(A\cup B)=(\wedge A)\wedge(\wedge B).$$

定义 1.7.2　设 L 是完备格，映射 $'$: $L\to L$ 满足：$\forall\{a_t\mid t\in T\}\subseteq L$，有

(1)
$$\left(\bigvee_{t\in T}a_t\right)'=\bigwedge_{t\in T}a_t' \tag{1.50}$$

(2)
$$\left(\bigwedge_{t\in T}a_t\right)'=\bigvee_{t\in T}a_t' \tag{1.51}$$

则称映射“′”满足强对偶律（De Morgan 律）.

定理 1.7.1　设 $'$: $L\to L$ 是完备格 L 中的对合对应，则：

(1) 两条强对偶律彼此等价；

(2)映射$'$:$L\to L$是完备格L中的逆序对应的充分必要条件是“$'$”满足强对偶律.

证明 (1)已知式(1.50)成立,则

$$(\bigwedge_{t\in T} a_t)'=(\bigwedge_{t\in T}(a_t')')'=(\bigvee_{t\in T} a_t')''=\bigvee_{t\in T} a_t'$$

故式(1.51)成立.

同理可以由式(1.51)推出式(1.50).

(2)充分性,设“$'$”满足对偶律.

若$a\leqslant b$,则$a\vee b=b$,于是$b'=(a\vee b)'=a'\wedge b'$,故$b'\leqslant a'$,所以“$'$”是逆序对应.

必要性,设“$'$”是逆序对合对应.

$\forall t\in T, a_t\leqslant \bigvee_{t\in T} a_t$,则$\forall t\in T,(\bigvee_{t\in T} a_t)'\leqslant a_t'$,故$(\bigvee_{t\in T} a_t)'\leqslant \bigwedge_{t\in T} a_t'$;又$\forall t\in T$,$a_t'\geqslant \wedge a_t'$. 由此$\forall t\in T, a_t\leqslant(\bigwedge_{t\in T} a_t')'$,从而$\bigvee_{t\in T} a_t\leqslant(\bigwedge_{t\in T} a_t')'$,故$(\bigvee_{t\in T} a_t)'\geqslant \bigwedge_{t\in T} a_t'$.

所以,$(\bigvee_{t\in T} a_t)'=\bigwedge_{t\in T} a_t'$. 同理证$(\bigwedge_{t\in T} a_t)'=\bigvee_{t\in T} a_t'$.

推论 1.7.1 完备格中伪补关于$\wedge$,$\vee$满足强对偶律.

定义 1.7.3 设L_1和L_2是完备格,$f:L_1\to L_2$是映射.

(1)若$\forall A\subseteq L_1$,
$$f(\vee A)=\vee f(A) \tag{1.52}$$
则称f是强保并映射;

(2)若$\forall A\subseteq L_1$,
$$f(\wedge A)=\wedge f(A) \tag{1.53}$$
则称f是强保交映射.

定理 1.7.2 (1)设$f:L_1\to L_2$是强保并映射,则$f(O_1)=O_2$;

(2)设$f:L_1\to L_2$是强保交映射,则$f(1_1)=1_2$.

证明 (1)因为$f(\vee\varnothing)=\vee f(\varnothing)$,故$f(O_1)=\vee\varnothing=O_2$.

(2)因为$f(\wedge\varnothing)=\wedge f(\varnothing)$,故$f(1_1)=\wedge\varnothing=1_2$.

定义 1.7.4 设L_1和L_2是完备格,若存在双射$f:L_1\to L_2$,f是强保并和强保交映射,则称f是同构映射,此时称L_1和L_2同构,记为$L_1\cong L_2$.

定理 1.7.3 设L_1和L_2是完备格,若$f:L_1\to L_2$是双射,f是同构映射的充分必要条件是f和f^{-1}都是保序映射.

证明 必要性,因为强保并(交)一定是保并(交). 定理 1.3.6 已证,在双射条件下,f保并、保交的充分必要条件是$a\leqslant b\Leftrightarrow f(a)\leqslant f(b)$,所以$f$和$f^{-1}$都是保序映射.

充分性,因为f是双射,只须证明f是强保并映射,同理证f是强保交映射.

因为f保序,且$f(L_1)=L_2$,由于O是L_1的最小元,则$f(O)$是L_2的最小元,故$f(O_1)=O_2$,即证明了,$f(\vee\varnothing)=\vee f(\varnothing)$.

设$A\subseteq L_1$,且$A\neq\varnothing$,$\forall x\in A$和$x\leqslant\vee A$,则$f(x)\leqslant f(\vee A)$,即$f(\vee A)$是$f(A)$在L_2中的上界. 设b是$f(A)$在L_2中的任意一个上界,则$\forall f(x)\in f(A)$,$f(x)\leqslant b$,由f

是双射且f^{-1}保序，则$f^{-1}(b)$是A在L_1中的上界，从而$\vee A \leqslant f^{-1}(b)$，则$f(\vee A) \leqslant f(f^{-1}(b)) = b$，所以$f(\vee A)$是$f(A)$在$L_2$中的上确界，即$f(\vee A) = \vee f(A)$，从而$f$是强保并映射.

定义 1.7.5　设L是完备格，$A \subseteq L$，若$\forall B \subseteq A$，$\bigvee_L B \in A$，$\bigwedge_L B \in A$，则称A是L的完备子格.

注意，$\bigvee_L B$，$\bigwedge_L B$表示B的上确界、下确界是在格L中取.

例 1.7.1　取$L = [0,1]$，L中的序是小于或等于关系，则$A = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$是$L$中的完备子格，而$B = (0,1)$，$C = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$都不是$L$的完备子格.

定义 1.7.6　设$\{L_t\}_{t \in T}$是一族偏序集，$L = \prod_{x \in T} L_t$是它们的直积集，$\forall f, g \in L$，定义

$$f \leqslant g \Leftrightarrow \forall t \in T, \quad f(t) \leqslant g(t) \tag{1.54}$$

则L是偏序集，称L为偏序集族$\{L_t\}_{t \in T}$的直积.

由于直积$\prod_{t \in T} L_t$中的偏关系是由各坐标的偏序关系定义的，如果直积中的上确界、下确界运算也是通过各坐标的上确界、下确界定义，则与定理 1.3.8 类似，易证由上确界、下确界确定的序关系和由各坐标定义的序关系是一致的.

定理 1.7.4　设$\{L_t\}_{t \in T}$是一族完备格，则直积$L = \prod_{t \in T} L_t$也是完备格.

证明　若$\forall t \in T$，$f(t)$是L_t的最小元，则f是L中的最小元，即$0 \in L$.

$\forall A \subseteq L$，若$A = \varnothing$，则$\vee A = 0 \in L$. 若$A \neq \varnothing$，则$\forall t \in T$，记

$$A_t = \{f(t) \mid f \in A\} \neq \varnothing$$

若在L_t中，$\vee A_t = g(t)$，则g是A在L中的上确界，即$\vee A = g \in L$.

同理$\wedge A \in L$.

所以L是完备格.

例 1.7.2　设X是非空集合，$L = [0,1]^X$，即

$$L = \{f \mid f: X \to [0,1]\} = \prod_{x \in X} [0,1]$$

则$(L, \wedge, \vee)$是完备格，而且L中的最大元f满足：$\forall x \in X$，$f(x) = 1$；L中的最小元g满足：$\forall x \in X$，$g(x) = 0$.

§1.8　完全分配格

定义 1.8.1　设L是完备格，$\forall a, a_t \in L$，$(t \in T)$，有：

(1)

$$a \wedge (\bigvee_{t \in T} a_t) = \bigvee_{t \in T} (a \wedge a_t) \tag{1.55}$$

(2) $$a \vee (\bigwedge_{t \in T} a_t) = \bigwedge_{t \in T}(a \vee a_t) \tag{1.56}$$

则称 L 是完备的无穷分配格，简称无穷分配格.

定义 1.8.2 设 L 是完备格，$\forall a_{ij} \in L(i \in I, j \in J_i)$，有：

(1) $$\bigwedge_{i \in I}(\bigvee_{j \in J_i} a_{ij}) = \bigvee_{f \in \prod_{i \in I} J_i}(\bigwedge_{i \in I} a_{if(i)}) \tag{1.57}$$

(2) $$\bigvee_{i \in I}(\bigwedge_{j \in J_i} a_{ij}) = \bigwedge_{f \in \prod_{i \in I} J_i}(\bigvee_{i \in I} a_{if(i)}) \tag{1.58}$$

则称 L 是完备的完全分配格，简称完全分配格.

例 1.8.1 设 X 是非空集合，$L = P(X)$，则 $P(X)$ 关于 $\cap$，$\cup$ 满足完全分配律，$(P(X), \cap, \cup)$ 是完全分配格，即：

(1) $$\bigcap_{i \in I}(\bigcup_{j \in J_i} A_{ij}) = \bigcup_{f \in \prod_{i \in I} J_i}(\bigcap_{i \in I} A_{if(i)}) \tag{1.59}$$

(2) $$\bigcup_{i \in I}(\bigcap_{j \in J_i} A_{ij}) = \bigcap_{f \in \prod_{i \in I} J_i}(\bigcup_{i \in I} A_{if(i)}) \tag{1.60}$$

证明 只证(1)，(2) 的证明类似.

$\forall x \in \bigcap_{i \in I}(\bigcup_{j \in J_i} A_{ij}) \Rightarrow \forall i \in I, x \in (\bigcup_{j \in J_i} A_{ij}) \Rightarrow \forall i \in I, \exists j \in J_i, x \in A_{ij} \Rightarrow \forall i \in I,$ $\exists f \in \prod_{i \in I} J_i, f(i) \triangleq j \in J_i, x \in A_{if(i)} \Rightarrow \exists f \in \prod_{i \in I} J_i, f(i) \in J_i, x \in \bigcap_{i \in I} A_{if(i)} \Rightarrow$ $x \in \bigcup_{f \in \prod_{i \in I} J_i}(\bigcap_{i \in I} A_{if(i)})$，故

$$\bigcap_{i \in I}(\bigcup_{j \in J_i} A_{ij}) \subseteq \bigcup_{f \in \prod_{i \in I} J_i}(\bigcap_{i \in I} A_{if(i)}).$$

反之，$\forall x \in \bigcup_{f \in \prod_{i \in I} J_i}(\bigcap_{i \in I} A_{if(i)}) \Rightarrow \exists f \in \prod_{i \in I} J_i, x \in \bigcap_{i \in I} A_{if(i)} \Rightarrow \exists f \in \prod_{i \in I} J_i, \forall i \in I,$ $x \in A_{if(i)} \Rightarrow \forall i \in I, \exists f \in \prod_{i \in I} J_i, f(i) \triangleq j \in J_i, x \in A_{ij} \Rightarrow \forall i \in I, x \in \bigcup_{j \in J_i} A_{ij} \Rightarrow$ $x \in \bigcap_{i \in I}(\bigcup_{j \in J_i} A_{ij})$ 故 $\bigcup_{f \in \prod_{i \in I} J_i}(\bigcap_{i \in I} A_{if(i)}) \subseteq \bigcap_{i \in I}(\bigcup_{j \in J_i} A_{ij})$，所以式(1.59) 成立

定义 1.8.3 设 L 是格，$\forall a, b \in L$，若 $a < b$，则存在 $\lambda \in L$，使 $a < \lambda < b$，则称 L 是稠密格.

定理 1.8.1 设 L 是完备的稠密格，$\forall b \in L$，则：

(1) $$\bigvee \{a \in L \mid a < b\} = b \tag{1.61}$$

(2) $$\bigwedge \{a \in L \mid b < a\} = b \tag{1.62}$$

证明 显然 b 是 $\{a \in L \mid a < b\}$ 的上界，则 $\bigvee \{a \in L \mid a < b\} \leqslant b$，假若等式不成立，则 $\exists r \in L$，使 $\bigvee \{a \in L \mid a < b\} < r < b$，由 $r < b$ 知，$r \in \{a \in L \mid a < b\}$，所以 $r \leqslant \bigvee \{a \in L \mid a < b\}$ 与 $\bigvee \{a \in L \mid a < b\} < r$ 矛盾，故 $\bigvee \{a \in L \mid a < b\} = b$. 同理证式(1.62).

例 1.8.2 设 $L = [0,1]$，则$(L, \wedge, \vee)$ 是稠密的完全分配格，即

(1) $\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} a_{ij}) = \bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)})$;

(2) $\bigvee_{i\in I}(\bigwedge_{j\in J_i} a_{ij}) = \bigwedge_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigvee_{i\in I} a_{if(i)})$.

证明　首先 $L=[0,1]$ 关于小于或等于关系"$\leqslant$"的稠密性和取上确界、下确界的完备性是显然的.

现在证明(1),(2) 的证明类似.

$\forall f\in\prod_{i\in I}J_i$,对于 $i\in I$,取 $f(i)=j$,则 $\bigvee_{j\in J_i} a_{ij}\geqslant a_{if(i)}$,于是

$\forall f\in\prod_{i\in I}J_i$, $\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} a_{ij})\geqslant\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)}$,所以 $\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} a_{ij})\geqslant\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)})$.

假若等式不成立,则由 $[0,1]$ 的稠密性,$\exists\lambda\in[0,1]$ 使

$$\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} a_{ij}) > \lambda > \bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)})$$

由左边的不等式得 $\forall i\in I$, $\bigvee_{i\in J_i} a_{ij}>\lambda$,故 $\forall i\in I$, $\exists_j\in J_i$, $a_{ij}>\lambda$,取 $f\in\prod_{i\in I}J_i$,使 $f(i)=j$,则 $\forall i\in I$, $a_{if(i)}>\lambda$,由此 $\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)}\geqslant\lambda$,从而 $\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)})\geqslant\lambda$ 与右式矛盾,故等式成立,即

$$\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} a_{ij}) = \bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)}).$$

定理 1.8.2　设 $\{L_t\}_{t\in T}$ 是一族完全分配格,则它们的直积 $L=\prod_{t\in T}L_t$ 也是完全分配格.

证明　定理 1.7.4 已证 $L=\prod_{t\in T}L_t$ 也是完备格.

由于直积 $L=\prod_{t\in T}L_t$ 的若干元求上确界、下确界是通过它们的坐标求上确界、下确界实现的,而每个 L_t 是完全分配格,即

$$(\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} a_{ij}))_t = (\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)})_t$$

所以 L 是完全分配格.

例 1.8.3　设 X 是非空集合,则

$$L=[0,1]^X=\{f\mid f:X\to[0,1]\}$$

是完全分配格.

定义 1.8.4　设 L 是完备格,$a\in L$,$A\subseteq L$,若 A 满足:

(1) $\bigvee A=a$;

(2) 若 $B\subseteq L$, $\bigvee B=a$,则 $\forall x\in A$, $\exists y\in B$ 使 $x\leqslant y$,则称 A 是 a 的极小集.

若 A 满足:

(1) $\bigwedge A=a$;

(2) 若 $B \subseteq L$, $\wedge B = a$,则 $\forall x \in A$, $\exists y \in B$ 使 $y \leqslant x$,则称 A 是 a 的极大集.

例 1.8.4 设 X 是非空集合,$L = P(X)$,$E \subseteq X$,$E \neq \varnothing$,取 $S_1 = \{\{e\} \mid e \in E\}$,显然 $\bigcup\limits_{\{e\} \in S_1} \{e\} = E'$,则 S_1 是 E' 的一个极小集.

取 $S_2 = \{\{e\}' \mid e \in E'\}$,$(E \neq X)$ 显然 $\bigcap\limits_{\{e\}' \in S_2} \{e\}' = E'$,则 S_2 是 E' 的一个极大集.

例 1.8.5 设 $X = [0,1]$,$a \in [0,1]$ 因 $\vee [0,a) = a$,则 $[0,a)$ 是 a 的极小集;而 $\wedge (a,1] = a$,则 $(a,1]$ 是 a 的极大集.

定理 1.8.3 设 L 是完备格,$\forall a \in L$,a 的任意多个极小集的并集是 a 的极小集,称为 a 的最大极小集,记为 $\beta(a)$. a 的任意多个极大集的并集是 a 的极大集,称为 a 的最大极大集,记为 $\alpha(a)$.

证明 设 $A_i (i \in I)$ 是 a 的极小集,即 $\vee A_i = a$,令 $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$,由于 $\forall x \in A$,$\exists_i \in I, x \in A_i$,则 $x \leqslant a$,于是 $\vee A \leqslant a$,但 $\forall i \in I$,有 $\vee A \geqslant \vee A_i = a$,故 $\vee A = a$. 若 $B \subseteq L$,且 $\vee B = a$,则 $\forall x \in A$, $\exists_i \in I, x \in A_i$,由于 A_i 是 a 的极小集,$\exists y \in B$,使 $x \leqslant y$,故 A 是 a 的极小集,又 A 是极小集的并集,所以 A 是最大极小集.

同理可证极大集的情况.

定理 1.8.4 设 L 是完备格,则 L 是完全分配格的充分必要条件是 L 的每个元都有极小集和极大集.

证明 必要性,$\forall a \in L$,令

$$\mathscr{A} = \{A \subseteq L \mid \vee A = a\}$$

由于 $\vee \{a\} = a$,故 $\mathscr{A} \neq \varnothing$,记

$$\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}, \quad A_i = \{a_{ij} \mid j \in J_i\} (i \in I)$$

则 $\vee A_i = \bigvee\limits_{j \in J_i} a_{ij} = a$. 令

$$A = \left\{ \bigwedge_{i \in I} a_{if(i)} \mid f \in \prod_{i \in I} J_i \right\}$$

则 A 是 a 的极小集. 事实上, $\vee A = \bigvee\limits_{f \in \prod\limits_{i \in I} J_i} (\bigwedge\limits_{i \in I} a_{if(i)}) = \bigwedge\limits_{i \in I} (\bigvee\limits_{i \in J_i} a_{ij}) = \bigwedge\limits_{i \in I} a = a$;若 $B \subseteq L$, 且 $\vee B = a$,则 $\exists_i \in I, B = A_i \in \mathscr{A}$,设 $x \in A$,由 A 的定义,$\exists f \in \prod\limits_{i \in I} J_i$,使

$$\bigwedge_{i \in I} a_{if(i)} = x$$

取 $y = a_{if(i)}$,则 $y \in A_i = B$,且 $x \leqslant y$,所以 A 是 a 的极小集,即 a 的极小集存在. 若令

$$\mathscr{B} = \{B_i \subseteq L \mid \wedge B_i = a\} = \{B_i \mid i \in I\}$$

其中

$$B_i = \{b_{ij} \mid j \in J_i\} (i \in I).$$

同理可证 $B = \left\{ \bigvee\limits_{i \in I} a_{if(i)} \mid f \in \prod\limits_{i \in I} J_i \right\}$ 是 a 的极大集,所以完全分配格的任意元都有极小集和极大集.

充分性，设 L 的每个元都有极小集，记

$$L=\{a_{ij}\mid i\in I,j\in J_i\}$$

$\forall f\in\prod\limits_{i\in I}J_i$，则 $a_{if(i)}\leqslant\bigvee\limits_{j\in J_i}a_{ij}$，从而

$$\bigwedge_{i\in I}a_{if(i)}\leqslant\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij})$$

所以
$$\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I}a_{if(i)})\leqslant\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij}).$$

现证
$$\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij})\leqslant\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I}a_{if(i)})$$

记 $a=\bigwedge\limits_{i\in I}(\bigvee\limits_{j\in J_i}a_{ij})$，则 $\forall i\in I$，$\bigvee\limits_{j\in J_i}a_{ij}\geqslant a$，由于 $\beta(a)$ 是 a 的极小集，故 $\forall x\in\beta(a)$，$\exists a_{ij}\geqslant x$，即 $\forall i\in I$，$\exists j=f(i)\in J_i$，使 $x\leqslant a_{if(i)}$，从而

$$x\leqslant\bigwedge_{i\in I}a_{if(i)}\leqslant\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I}a_{if(i)})$$

由于 x 是 $\beta(a)$ 的任意元，故 $\bigvee\limits_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge\limits_{i\in I}a_{if(i)})$ 是 $\beta(a)$ 的上界. 由于 $\forall i\in I$，$\bigvee\limits_{j\in J_i}a_{ij}\geqslant x$，则 $a=\bigwedge\limits_{i\in I}(\bigvee\limits_{j\in J_i}a_{ij})$ 是 $\beta(a)$ 的上确界，所以

$$a=\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij})\leqslant\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I}a_{ij})$$

由此得

$$\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij})=\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I}a_{ij})$$

同理证明另一个完全分配律

$$\bigvee_{i\in I}(\bigwedge_{j\in J_i}a_{ij})=\bigwedge_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigvee_{i\in I}a_{ij})$$

所以 L 是完全分配格.

§1.9　完全分配格的分子表示

定义 1.9.1　设 L 是格，$a\in L$.

(1) $\forall x,y\in L$，当 $x\wedge y\leqslant a$ 时有 $x\leqslant a$ 或 $y\leqslant a$，则称 a 是素元；

(2) $\forall x,y\in L$，当 $x\wedge y=a$ 时有 $x=a$ 或 $y=a$，则称 a 是交既约元；

(3) $\forall x,y\in L$，当 $a\leqslant x\vee y$ 时有 $a\leqslant x$ 或 $a\leqslant y$，则称 a 是余素元；

(4) $\forall x,y\in L$，当 $a=x\vee y$ 时有 $a=x$ 或 $a=y$，则称 a 是并既约元.

定理 1.9.1　设 L 是分配格，则：

(1) a 是素元当且仅当 a 是交既约元；

(2) a 是余素元当且仅当 a 是并既约元.

证明　只证(1)，(2) 的证明类似.

已知 a 是交既约元，设 $x\wedge y\leqslant a$，由分配律得

$$a = a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$$

由于 a 是交既约元，则 $a = a \vee x$ 或 $a = a \vee y$，那么 $x \leq a$ 或 $y \leq a$，所以 a 是素元.

反之，已知 a 是素元，设 $x \wedge y = a$，则 $x \wedge y \leq a$，由于 a 是素元，则 $x \leq a$ 或 $y \leq a$，又由 $x \wedge y = a$ 得 $a \leq x$ 且 $a \leq y$，故，$x = a$ 或 $y = a$，所以 a 是交既约元.

由此，在分配格或完全分配格中，素元等价于交既约元；余素元等价于并既约元. 以下我们常用到并既约元，显然最小元是并既约元.

定义 1.9.2 设 L 是格，称格 L 中的非零并既约元为分子.

例 1.9.1 设 X 是非空集合，$L = P(X)$ 中单点集 $\{x\}$ 是 L 中的分子.

例 1.9.2 设 X 是非空集合，$L = [0,1]^X$，即

$$L = \{f \mid f: X \to [0,1]\}$$

令

$$x_\lambda \triangleq f(t) = \begin{cases} \lambda, & t = x \\ 0, & t \neq x \end{cases}$$

则 $\forall x \in X, \lambda \in [0,1]$，$x_\lambda$ 是 L 中的分子.

引理 1.9.1 设 L 是完全分配格，$\alpha(a)$ 是 a 的最大极大集，若 $b \in \alpha(a)$，则存在 $c \in L$，使 $c \in \alpha(a)$ 且 $b \in \alpha(c)$.

证明 因为 $\alpha(a)$ 是 a 的最大极大集，则 $\wedge \alpha(a) = a$，且 $\forall A = \{a_i \mid i \in I\} \subseteq L$，$\alpha(\bigwedge_{i \in I} a_i) = \bigcup_{i \in I} \alpha(a_i)$，则 $\alpha(a) = \alpha(\wedge \alpha(a)) = \cup \{\alpha(x) \mid x \in \alpha(a)\}$，由于 $b \in \alpha(a)$，则存在 $x = c$，$b \in \alpha(c)$，且 $c \in \alpha(a)$.

推论 1.9.1 设 L 是完全分配格，$\alpha(a)$ 是 a 的最大极大集，且 $b \in \alpha(a)$，则存在 $c_1, c_2, \cdots \in L$，使 $c_1 \in \alpha(a)$，$c_2 \in \alpha(c_1)$，$\cdots$，$c_{k+1} \in \alpha(c_k)$ $(k = 1,2,\cdots)$ 且 $b \in \alpha(c_n)$ $(n = 1,2,\cdots)$.

引理 1.9.2 设 L 是完全分配格，$a, b \in L$，且 $b \in \alpha(a)$，则 L 中存在理想 I，满足：

(1) $a \in I \subseteq \downarrow b$；

(2) $L - I$ 中有极小元 c，即 $\forall x \in L - I, c \leq x$.

证明 (1) 设 $c_1, c_2, \cdots$ 是推论 1.9.1 所述，令 $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\downarrow c_n)$，显然 I 是下集，且 I 是上定向，所以 I 是理想，再由推论 1.9.1，$b \in \alpha(c_n)$，$n = 1,2,\cdots,n$ 知 $c_n \leq b$，则 $a \in I \subseteq \downarrow b$.

(2) 设 $x \in L - I$，则 $\{x\}$ 是 $L - I$ 中由一个元素组成的链，由 Kuratowski 引理知，在偏序集中每个链都包含于某一极大链中，则 $L - I$ 中存在包含 $\{x\}$ 的极大链 φ，令 $c = \bigwedge_L \varphi$，则 c 是极小元.

现证 $c \notin I$，假若 $c \in I$，则存在 $k \in N$，使 $c \in \downarrow c_k$，从而 $c \leq c_k$，即 $\bigwedge_L \varphi \leq c_k$，但 $c_{k-1} \in \alpha(c_k)$，即 $c_k \leq c_{k+1}$，由极大集的定义，存在 $y \in \varphi$，使 $y \leq c_{k-1}$，那么 $y \in \downarrow c_{k-1} \subseteq I$，这与 $y \in \varphi$ 矛盾，所以 $c \in L - I$，且 c 是 $L - I$ 的极小元.

定理 1.9.2 设 L 是完全分配格，则 L 中的每个元都可以表示为分子的并.

证明　设 $e \in L$,若 $e = 0$,则在分子集中取空集 $\varnothing$,便有 $e = \vee \varnothing$.

若 $e \neq 0$,令

$$\pi(e) = \{x \in L \mid x \leqslant e, x \text{ 是 } L \text{ 的分子}\}$$

显然 $\vee \pi(e) \leqslant e$,现证 $\vee \pi(e) \geqslant e$.

假若 $\vee \pi(e) \ngeqslant e$,令 $a = \vee \pi(e)$,则 $a \ngeqslant e$,故 $e \in \alpha(a)$,由引理 1.9.1 知,$\exists b \in \alpha(a)$,使 $e \in \alpha(b)$,则 $b < e$,由引理 1.9.2 知,存在理想 I,使 $a \in I \subseteq \downarrow b$. 因为 $b < e$,则 $e \notin \downarrow b, e \notin I$,则 $e \in L - I$. 又由引理 1.9.2 知,$L - I$ 中存在极小元 $c \leqslant e$,现证 c 是分子.

因为 $0 \in I$,而 $c \in L - I$,则 $c \neq 0$,同时 c 是并既约元. 事实上,假若 c 不是并既约元,则有 x, y,当 $x \vee y = c$ 时,$c \neq x, c \neq y$. 这时 $x < c, y < c$,由于 c 是 $L - I$ 的极小元,则 $x \in I, y \in I$,这样 $c = x \vee y \in I$,与 $c \in L - I$ 矛盾,所以 c 是并既约元,即 c 是分子.

由于 $c \leqslant e, c \in \pi(e)$,从而 $c \leqslant a$,又 $a \in I$,由于理想 I 是下集,则 $c \in I$,又与 $c \in L - I$ 矛盾,所以 $\vee \pi(e) \geqslant e$,从而 $\vee \pi(e) = e$.

设 L 是完全分配格,令

$$M(L) \triangleq \{x \in L \mid x \text{ 是 } L \text{ 的分子}\}$$

$$\pi(x) \triangleq \{y \in M(L) \mid y \leqslant x\}$$

$\forall a \in L, \beta(a)$ 是 a 的最大极小集,令

$$\beta^*(a) \triangleq \cup \{\pi(x) \mid x \in \beta(a)\}$$

由于 $\beta(a)$ 的每个元 x 都可以表示为 $\pi(x)$ 的并,易证 $\beta^*(a)$ 也是 a 的极小集,即 $\vee \beta^*(a) = a$,称 $\beta^*(a)$ 为 a 的标准极小集.

由此,完全分配格中的每个元 a 都有一个由分子组成的标准极小集 $\beta^*(a)$,使

$$a = \vee \beta^*(a).$$

由于完全分配格中的每个元都可以表示为若干个分子的并,所以王国俊教授把完全分配格称为分子格.

定义 1.9.3　有伪补的完全分配格称为模糊格,简称为 F 格.

由于完全分配格中的伪补对 $\wedge$ 和 $\vee$ 有强对偶律,所以模糊格中有强对偶律.

例 1.9.3　在完全分配格$([0,1], \wedge, \vee)$中定义伪补 $':[0,1] \to [0,1]$ 为 $\forall \alpha \in [0,1], \alpha' = 1 - \alpha$,则$([0,1], \wedge, \vee, ')$是模糊格.

定理 1.9.3　设 $\{L_t\}_{t \in T}$,是一族模糊格,则它们的直积 $L = \prod_{t \in T} L_t$ 是模糊格.

其中 $L = \prod_{t \in T} L_t$ 的伪补定义为每个坐标的伪补,即 $\forall a \in L$,a 的伪补 $a' = \{a'_t\}_{t \in T}$.

证明　由于完全分配格的直积也是完全分配格,所以 $L = \prod_{t \in T} L_t$ 是完分全配格,又 L 中的伪补是按坐标取伪补定义的,显然它也是 L 中的伪补,所以 $L = \prod_{t \in T} L_t$ 是模糊格.

例 1.9.4 设 X 是非空集合,在 $L=[0,1]^X$ 中定义伪补“$'$”为:$\forall f\in L,x\in X$.

$$f(x)'=1-f(x)$$

则 $(L,\wedge,\vee,')$ 是模糊格.

在第 2 章中,我们将介绍,$L=[0,1]^X$ 就是 X 上的模糊集全体,所以 X 的全体模糊集关于 $\wedge$、$\vee$ 及伪补“$'$”构成的代数系统 $([0,1]^X,\wedge,\vee,')$ 是模糊格.

习 题 1

1. 设 $X=\{a,b,c\}$,写出 X 的幂集 $P(X)$.
2. 判断下列关系是否正确:

$A=\{A\}$; $A\in\{A\}$; $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$; $\varnothing=\{\varnothing\}$; $\varnothing\in\{\{\varnothing\}\}$.

3. 设 A、$A_t\in P(X)\ (t\in T)$,证明:

(1) $A\cup(\bigcap\limits_{t\in T}A_t)=\bigcap\limits_{t\in T}(A\cup A_t)$; (2) $A\cap(\bigcup\limits_{t\in T}A_t)=\bigcup\limits_{t\in T}(A\cap A_t)$;

(3) $(\bigcap\limits_{t\in T}A_t)'=\bigcup\limits_{t\in T}A_t'$; (4) $(\bigcup\limits_{t\in T}A_t)'=\bigcap\limits_{t\in T}A_t'$.

4. 设 $f:X\to Y$,证明:

(1) $\forall A\subseteq X,A\subseteq f^{-1}(f(A))$; (2) $\forall B\subseteq Y,B\supseteq f(f^{-1}(B))$.

5. 设 $f:X\to Y$,证明下列条件等价:

(1) f 是单射;

(2) $\forall A,B\subseteq X,\ f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$;

(3) $\forall A\subseteq X,A=f^{-1}(f(A))$;

(4) $\forall A\subseteq X,\ f(X-A)=f(X)-f(A)$.

6. 设 $f:X\to Y,\{A_t\}_{t\in T}$ 是 X 的子集族,证明:

(1) $f(\bigcup\limits_{t\in T}A_t)=\bigcup\limits_{t\in T}f(A_t)$; (2) $f(\bigcap\limits_{t\in T}A_t)\subseteq\bigcap\limits_{t\in T}f(A_t)$.

7. 设 $f:X\to Y,\{B_t\}_{t\in T}$ 是 Y 的子集族,证明:

(1) $f^{-1}(\bigcup\limits_{t\in T}B_t)=\bigcup\limits_{t\in T}f^{-1}(B_t)$; (2) $f^{-1}(\bigcap\limits_{t\in T}B_t)=\bigcap\limits_{t\in T}f^{-1}(B_t)$.

8. 设 $(L,\leqslant)$ 是格,$\forall a,b,c\in L$,证明:

(1) $b\leqslant c\Rightarrow a\wedge b\leqslant a\wedge c,a\vee b\leqslant a\vee c$; (2) $\begin{matrix}a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c),\\ a\wedge(b\vee c)\geqslant(a\wedge b)\vee(a\wedge c);\end{matrix}$

(3) $a\leqslant c\Leftrightarrow a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c\Leftrightarrow a\wedge(b\vee c)\geqslant(a\wedge b)\vee c$.

9. 设 $(L,\vee,\wedge,1,0,1)$ 是布尔格,若 $\forall\alpha,\beta\in L$,有 $\alpha\vee\beta=1,\alpha\wedge\beta=0$,证明 $\beta=\alpha'$.

10. 在代数系统 $([0,1],\vee,\wedge,',)$ 中,$\forall\alpha,\alpha_t(t\in T)\in L$,证明:

(1) $\alpha\vee(\bigwedge\limits_{t\in T}\alpha_t)=\bigwedge\limits_{t\in T}(\alpha\vee\alpha_t)$; (2) $\alpha\wedge(\bigvee\limits_{t\in T}\alpha_t)=\bigvee\limits_{t\in T}(\alpha\wedge\alpha_t)$;

(3) $(\bigvee\limits_{t\in T}\alpha_t)'=\bigwedge\limits_{t\in T}\alpha_t'$; (4) $(\bigwedge\limits_{t\in T}\alpha_t)'=\bigvee\limits_{t\in T}\alpha_t'$.

11. 设 L 是稠密的完备格,证明 $\forall\beta\in L$,有:

(1) $\vee\{\alpha \mid \alpha < \beta\} = \beta$;　　(2) $\wedge\{\alpha \mid \alpha > \beta\} = \beta$.

12. 在完备格中,证明 $\bigwedge_{t\in T}\alpha_t = \vee\{\alpha \mid \alpha < \alpha_t (t\in T)\}$.

13. 设"$'$"是完备格 L 上的伪补,证明 $\{\alpha_t \mid t\in T\}\subseteq L$,有:

(1) $(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)' = \bigwedge_{t\in T}\alpha_t'$;　　(2) $(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t)' = \bigvee_{t\in T}\alpha_t'$.

14. 设 X 是集合,$(L,\leqslant)$ 是偏序集,记 $\xi = \{A \mid A: X\to L\}$,证明:

(1)若 L 是格,则 ξ 是格;

(2)若 L 是布尔格,则 ξ 是布尔格.

15. 设 $f: L_1\to L_2$ 是序同态映射,证明:

(1) $f^{-1}(1) = 1$, $f^{-1}(0) = 0$;　　(2) $\forall\beta\in L_2$, $f^{-1}(\beta) = \vee\{\alpha\in L_1 \mid f(\alpha)\leqslant\beta\}$;

(3) $f(\bigvee_{t\in T}\alpha_t) = \bigvee_{t\in T} f(\alpha_t)$;　　(4) $f^{-1}(\bigwedge_{t\in T}\beta_t) = \bigwedge_{t\in T} f^{-1}(\beta_t)$.

其中,L_1,L_2 是完备格,0,1 分别是 L_1,L_2 中的最大元和最小元.

第2章 模糊集的基本理论

§2.1 模糊集及其运算

设 X 是论域,A 是 X 的子集,A 可以用特征函数表示,即映射 $A:X\to\{0,1\}$,$\forall x\in X$

$$A(x)=\begin{cases}0, & x\notin A\\ 1, & x\in A\end{cases} \tag{2.1}$$

X 的子集和子集的特征函数一一对应.

对于论域 X 上的一个模糊概念,确定了 X 上的一个模糊子集 A,对于任意的 $x\in X$,x 和 A 之间不是绝对属于或绝对不属于的关系. 为了表示 x 属于 A 的程度,我们用[0,1]中一个数值来表示,所以论域 X 上的一个模糊子集可以用 X 到[0,1]的一个映射来描述.

定义 2.1.1 设 X 是论域,映射 $A:X\to[0,1]$ 称为 X 的一个模糊子集,简称为 F 集,映射 A 称为 F 集 A 的隶属函数,$A(x)$ 称为 x 关于 A 的隶属度.

论域 X 上的所有 F 集记为 $F(X)$,显然 $P(X)\subseteq F(X)$.

论域 X 上的 F 集有下列表示法:

(1) $A=\{(x,A(x))\mid x\in X\}$;

(2) 若 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,记 $A\triangleq(A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n))$;

(3) 若 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$,记 $A\triangleq\sum_{i=1}^{\infty}A(x_i)/x_i$;

(4) 若 X 是不可数集,记 $A\triangleq\int A(x)/x$.

例 2.1.1 设 $X=[0,100]$ 表示年龄论域,Zadeh 给出了年轻人“Y”和年老“O”两个 F 集的隶属函数.

$$Y(x)=\begin{cases}1, & 1\leqslant x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<x\leqslant 100\end{cases}$$

$$O(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\leqslant 100\end{cases}$$

定义 2.1.2 设 $A,B\in F(X)$.

(1)若 $\forall x\in X,A(x)\leqslant B(x)$,则称 A 包含于 B,或 B 包含 A,记为 $A\subseteq B$,或 $B\supseteq A$;

(2)若 $\forall x\in X,A(x)=B(x)$,则称 A 和 B 相等,记为 $A=B$.

显然,$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

$\forall x\in X,\varnothing(x)=0,X(x)=1$.

由此,$(F(X),\subseteq)$是具有最小元$\varnothing$和最大元 X 的偏序集.

定义 2.1.3 设 $A,B\in F(X)$,定义并、交、余运算如下:

(1) $$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x) \tag{2.2}$$

(2) $$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x) \tag{2.3}$$

(3) $$A'(x)=1-A(x) \tag{2.4}$$

分别称 $A\cup B$、$A\cap B$ 为 A 和 B 的并集、交集;称 A'为 A 的余集. 如图 2.1 ~ 图 2.3 所示.

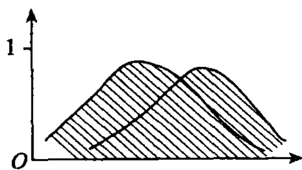


图 2.1

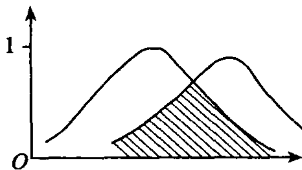


图 2.2

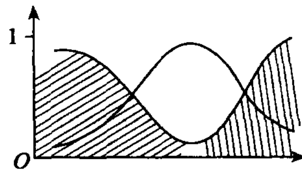


图 2.3

设 T 是指标集,$A_t\in F(X)(t\in T)$,定义无限并、无限交如下

$$(\bigcup_{t\in T}A_t)(x)=\bigvee_{t\in T}A_t(x) \tag{2.5}$$

$$(\bigcap_{t\in T}A_t)(x)=\bigwedge_{t\in T}A_t(x) \tag{2.6}$$

定理 2.1.1 设 $A,B,C\in F(X)$,则并、交、余运算满足下列性质:

(1)幂等律 $A\cup A=A,A\cap A=A$;

(2)交换律 $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

(3)结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4)吸收律 $A\cup(A\cap B)=A,A\cap(A\cup B)=A$;

(5)分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(6)同一律 $A\cup\varnothing=A,A\cap X=A$;

(7)两极律 $A\cup X=X,A\cap\varnothing=\varnothing$;

(8)对合律 $(A')'=A$;

(9)对偶律 $(A\cup B)'=A'\cap B',(A\cap B)'=A'\cup B'$.

证明简单,从略.

F 集不满足补余律,即 $A\cup A'\neq X, A\cap A'\neq\varnothing$.

例 2.1.2 设 $X=[0,1], A(x)=x$,则 $A'(x)=1-x$,且

$$(A\cup A')(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant\frac{1}{2}\\ x, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$(A\cap A')(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant\frac{1}{2}\\ 1-x, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以,$A\cup A'\neq X, A\cap A'\neq\varnothing$.

设 $A\in F(X)$,即 $A: X\to[0,1]$,所以 $A\in[0,1]^X$. 又 $\forall A,B\in F(X), x\in X$

$$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x)$$

$$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x)$$

$$A'(x)=1-A(x)$$

即代数系统 $(F(X),\cap,\cup,')$ 中的运算分别是由代数系统 $([0,1]^X,\wedge,\vee,')$ 中的相应运算定义的,易证 $F(X)\cong[0,1]^X$,所以 $(F(X),\cap,\cup,')$ 是一个具有伪补的完全分配格,即模糊格.

§2.2 模糊集的模运算

定义 2.2.1 映射 $\triangle:[0,1]^2\to[0,1]$ 称为三角模,如果 $\triangle$ 满足:$\forall a,b,c,d\in[0,1]$.

(1)交换律:$\triangle(a,b)=\triangle(b,a)$;

(2)结合律:$\triangle(\triangle(a,b),c)=\triangle(a,\triangle(b,c))$;

(3)单调性:$a\leqslant c, b\leqslant d$,则 $\triangle(a,b)\leqslant\triangle(c,d)$;

(4)$\triangle(0,0)=0, \triangle(1,1)=1$.

若三角模 $\triangle$ 还满足:$\triangle(a,1)=a$,则称 $\triangle$ 为 T 模,记为 T;

若三角模 $\triangle$ 还满足:$\triangle(0,a)=a$,则称 $\triangle$ 为 S 模,记为 S.

例 2.2.1 (1)下列五种运算是 T 模

$$T_0'(a,b)=\begin{cases}a, & b=1\\ b, & a=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$T_0(a,b)=a\wedge b$$

$$T_1(a,b)=ab$$

$$T_2(a,b)=\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$$

$$T_\infty(a,b)=0\vee(a+b-1)$$

(2)下列五种运算是 S 模

$$S_0'(a,b)=\begin{cases}b, & a=0\\ a, & b=0\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$

$$S_0(a,b)=a\vee b$$

$$S_1(a,b)=a+b-ab$$

$$S_2(a,b)=\frac{a+b}{1+ab}$$

$$S_\infty(a,b)=1\wedge(a+b).$$

例 2.2.2 $\forall\lambda\geqslant 0$,定义

$$T^{(\lambda)}(a,b)=\frac{ab}{\lambda+(1-\lambda)(a+b-ab)}$$

$$S^{(\lambda)}(a,b)=\frac{a+b+(\lambda-2)ab}{1+(\lambda-1)ab}$$

$T^{(\lambda)}$ 和 $S^{(\lambda)}$ 分别是 T 模和 S 模.

特别地,当 $\lambda=1$ 时,$T^{(1)}=T_1,S^{(1)}=S_1$,

当 $\lambda=2$ 时,$T^{(2)}=T_2,S^{(2)}=S_2$.

定理 2.2.1 三角模之间满足下列关系

$$T_0'\leqslant T_\infty\leqslant T_2\leqslant T_1\leqslant T_0\leqslant S_0\leqslant S_1\leqslant S_2\leqslant S_\infty\leqslant S_0'.$$

证明简单,从略.

记

$$\mathscr{D}(T)=\{T\mid T\text{ 是 }T\text{ 模}\}$$

$$\mathscr{D}(S)=\{S\mid S\text{ 是 }S\text{ 模}\}.$$

定理 2.2.2 三角模有如下性质:

(1) $\forall T\in\mathscr{D}(T)$,有 $T_0'\leqslant T\leqslant T_0$;

(2) $\forall S\in\mathscr{D}(S)$,有 $S_0\leqslant S\leqslant S_0'$;

(3) $\forall T\in\mathscr{D}(T)$,$T$ 满足幂等律 $\Leftrightarrow T=T_0$;

(4) $\forall S\in\mathscr{D}(S)$,$S$ 满足幂等律 $\Leftrightarrow S=S_0$.

证明 (1)因为 $\forall T\in\mathscr{D}(T)$,$T(a,1)=a$,而

$$T_0'(a,b)=\begin{cases}a, & b=1\\ b, & a=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则 $T_0'\leqslant T$.

由于 T 的单调性 $T(a,b)\leqslant T(a,1)=a$,$T(a,b)\leqslant T(1,b)=b$,所以 $T(a,b)\leqslant$

$a\wedge b$,

$$T(a,b)\leqslant a\wedge b,$$

即 $T\leqslant T_0$,从而 $T_0'\leqslant T\leqslant T_0$.

同理证明(2).

(3)充分性显然. 设 T 满足幂等律,即 $T(a,a)=a$,则

$$T_0(a,b)=a\wedge b=T(a\wedge b,a\wedge b)\leqslant T(a,b)\leqslant T_0(a,b)$$

从而 $T=T_0$.

同理证明(4).

定义 2.2.2 $\forall a\in[0,1]$,$a'=1-a$ 是 a 的伪补,若 $T\in\mathscr{D}(T)$,$S\in\mathscr{D}(S)$ 满足:

(1) $$(T(a,b))'=S(a',b') \tag{2.7}$$

(2) $$(S(a,b))'=T(a',b') \tag{2.8}$$

则称 T 和 S 是对偶模.

不难验证,T_0 与 S_0,T_1 与 S_1,T_2 与 S_2,T_∞ 与 S_∞ 是四对对偶模.

定义 2.2.3 设 T 和 S 是一对对偶模,$\forall A,B\in F(X)$,称:

(1) $$(A\,\dot\cup\,B)(x)=S(A(x),B(x)) \tag{2.9}$$

是 A 和 B 的模并;

(2) $$(A\,\dot\cap\,B)(x)=T(A(x),B(x)) \tag{2.10}$$

是 A 和 B 的模交;

(3) $$A'(x)=1-A(x) \tag{2.11}$$

是 A 的补.

定理 2.2.3 F 集的模运算满足下列性质:

(1)交换律 $A\,\dot\cup\,B=B\,\dot\cup\,A$,$A\,\dot\cap\,B=B\,\dot\cap\,A$;

(2)结合律 $(A\,\dot\cup\,B)\,\dot\cup\,C=A\,\dot\cup\,(B\,\dot\cup\,C)$,

$(A\,\dot\cap\,B)\,\dot\cap\,C=A\,\dot\cap\,(B\,\dot\cap\,C)$;

(3)同一律 $A\,\dot\cap\,X=A$,$A\,\dot\cup\,\varnothing=A$;

(4)两极律 $A\,\dot\cup\,X=X$,$A\,\dot\cap\,\varnothing=\varnothing$;

(5)对合律 $(A')'=A$;

(6)对偶律 $(A\,\dot\cup\,B)'=A'\,\dot\cap\,B'$,

$(A\,\dot\cap\,B)'=A'\,\dot\cup\,B'$;

(7) $A\,\dot\cap\,B\subseteq A$,$A\,\dot\cap\,B\subseteq B$,

$A\subseteq A\,\dot\cup\,B$,$B\subseteq A\,\dot\cup\,B$;

(8) $\varnothing'=X$,$X'=\varnothing$.

证明简单,从略.

由上述定理 2.2.3,三角模不一定满足幂等律,吸收律,分配律和补余律,所以代数系统 $(F(X),\dot\cap,\dot\cup,')$ 不是格.

例 2.2.3　由例 2.2.1 中的四对模运算可以定义下列常用的四对 F 运算：

(1)由 $T_0(a,b)=a\wedge b, S_0(a,b)=a\vee b$ 定义

$$(A\cap B)(x)=T_0(A(x),B(x))=A(x)\wedge B(x)$$

$$(A\cup B)(x)=S_0(A(x),B(x))=A(x)\vee B(x).$$

(2)由 $T_1(a,b)=ab, S_1(a,b)=a+b-ab$ 定义

$$(A\hat{\wedge} B)(x)=T_1(A(x),B(x))=A(x)B(x)$$

$$(A\hat{+}B)(x)=S_1(A(x),B(x))=A(x)+B(x)-A(x)B(x).$$

(3)由 $T_2(a,b)=\dfrac{ab}{1+(1-a)(1-b)}, S_2(a,b)=\dfrac{a+b}{1+ab}$定义

$$(A\dot{\varepsilon}B)(x)=T_2(A(x),B(x))=\frac{A(x)B(x)}{1+(1-A(x))(1-B(x))}$$

$$(A\overset{+}{\varepsilon}B)(x)=S_2(A(x),B(x))=\frac{A(x)+B(x)}{1+A(x)B(x)}.$$

(4)由 $T_\infty(a,b)=0\vee(a+b-1), S_\infty(a,b)=1\wedge(a+b)$定义

$$(A\odot B)(x)=T_\infty(A(x),B(x))=0\vee(A(x)+B(x)-1)$$

$$(A\oplus B)(x)=S_\infty(A(x),B(x))=1\wedge(A(x)+B(x)).$$

F 集合的以上模运算是经典集合的并、交运算的推广，若 F 集合退化为经典集合，则 S 模运算就是并运算，T 模运算就是交运算，伪补运算就是补运算.

§2.3　模糊集的分解定理

定义 2.3.1　设 $A\in F(X)$，$\forall\lambda\in[0,1]$

(1)
$$A_\lambda=\{x\in |A(x)\geqslant\lambda\}\tag{2.12}$$
称为 A 的 λ 截集.

(2)
$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\{x\in X|A(x)>\lambda\}\tag{2.13}$$
称为 A 的 λ 强截集.

特别地：

(1)
$$A_1=\{x\in X|A(x)=1\}\tag{2.14}$$
称为 A 的核，记为 Ker$A$.

(2)
$$A_0=\{x\in X|A(x)>0\}\tag{2.15}$$
称为 A 的支集，记为 Supp$A$.

显然，(1)$A_\lambda\subseteq X, A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq X, A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq A_\lambda$.

(2)当 $\lambda<\mu$ 时，$A_\mu\subseteq A_\lambda, A_{\underset{\cdot}{\mu}}\subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}, A_\mu\subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

定理 2.3.1　设 $A,B\in F(X)$，$\lambda\in[0,1]$，则：

(1)
$$(A\cup B)_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda\tag{2.16}$$

(2)
$$(A\cap B)_\lambda=A_\lambda\cap B_\lambda\tag{2.17}$$

(3) $$(A\cup B)_{\dot\lambda}=A_{\dot\lambda}\cup B_{\dot\lambda} \tag{2.18}$$

(4) $$(A\cap B)_{\dot\lambda}=A_{\dot\lambda}\cap B_{\dot\lambda} \tag{2.19}$$

证明 只证(1),其他证明类似.

$\forall x\in(A\cup B)_\lambda\Leftrightarrow(A\cup B)(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow A(x)\vee B(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow A(x)\geqslant\lambda$ 或 $B(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow x\in A_\lambda$ 或 $x\in B_\lambda\Leftrightarrow x\in A_\lambda\cup B_\lambda$.

所以$(A\cup B)_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda$.

定理 2.3.2 设$\{A_t|t\in T\}\subseteq F(X)$,$\lambda\in[0,1]$,则:

(1) $$(\bigcup_{t\in T}A_t)_\lambda\supseteq\bigcup_{t\in T}(A_t)_\lambda \tag{2.20}$$

(2) $$(\bigcap_{t\in T}A_t)_\lambda=\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda \tag{2.21}$$

(3) $$(\bigcup_{t\in T}A_t)_{\dot\lambda}=\bigcup_{t\in T}(A_t)_{\dot\lambda} \tag{2.22}$$

(4) $$(\bigcap_{t\in T}A_t)_{\dot\lambda}\subseteq\bigcap_{t\in T}(A_t)_{\dot\lambda} \tag{2.23}$$

证明 只证(1)、(2),其他证明类似.

(1) $\forall x\in\bigcup_{t\in T}(A_t)_\lambda\Rightarrow\exists t\in T,x\in(A_t)_\lambda\Rightarrow\exists t\in T,A_t(x)\geqslant\lambda\Rightarrow\bigvee_{t\in T}A_t(x)\geqslant\lambda\Rightarrow(\bigcup_{t\in T}A_t)(x)\geqslant\lambda\Rightarrow x\in(\bigcup_{t\in T}A_t)_\lambda$.

所以$\bigcup_{t\in T}(A_t)_\lambda\subseteq(\bigcup_{t\in T}A_t)_\lambda$.

(2)$x\in(\bigcap_{t\in T}A_t)_\lambda\Leftrightarrow(\bigcap_{t\in T}A_t)(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow\bigwedge_{t\in T}A_t(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow\forall t\in T,A_t(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow\forall t\in T,x\in(A_t)_\lambda\Leftrightarrow x\in\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda$.

所以$(\bigcap_{t\in T}A_t)_\lambda=\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda$.

一般情况下,定理 2.3.2 中的(1)和(4)等号不成立.

例如,设 $X\neq\varnothing$,$A_n\in F(X)$,$\forall x\in X$.

$$A_n(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\quad(n=1,2,\cdots)$$

则$(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)_{\dot{\frac{1}{2}}}\neq\varnothing$,而$\forall n\in N,(A_n)_{\frac{1}{2}}=\varnothing$,故$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n)_{\frac{1}{2}}=\varnothing$,所以

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)_{\frac{1}{2}}\neq\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n)_{\frac{1}{2}}.$$

定理 2.3.3 设$A\in F(X)$,$\{\lambda_t|t\in T\}\subseteq[0,1]$,记$\lambda=\bigvee_{t\in T}\lambda_t$,$\mu=\bigwedge_{t\in T}\lambda_t$,则:

(1) $$A_\lambda=\bigcap_{t\in T}A_{\lambda_t} \tag{2.24}$$

(2) $$A_{\dot\mu}=\bigcup_{t\in T}A_{\dot\lambda_t} \tag{2.25}$$

证明 只证(1),(2)的证明类似.

$\forall t\in T,\lambda_t\leqslant\lambda\Rightarrow\forall t\in T,A_\lambda\subseteq A_{\lambda_t}\Rightarrow A_\lambda\subseteq\bigcap_{t\in T}A_{\lambda_t}$.

反之,$\forall x\in\bigcap_{t\in T}A_{\lambda_t}\Rightarrow\forall t\in T,x\in A_{\lambda_t}\Rightarrow\forall t\in T,A(x)\geqslant\lambda_t\Rightarrow A(x)\geqslant\bigvee_{t\in T}\lambda_t=\lambda\Rightarrow x\in A_\lambda$

故$\bigcap_{t\in T}A_{\lambda_t}\subseteq A_\lambda$,所以 $A_\lambda=\bigcap_{t\in T}A_{\lambda_t}$.

特别地,$\forall A\in F(X)$,有:

(1)
$$A_{\lambda}=\bigcap_{\alpha<\lambda}A_{\alpha} \tag{2.26}$$

(2)
$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \tag{2.27}$$

注意：

(1)
$$A_{\lambda}\supseteq\bigcup_{\alpha>\lambda}A_{\alpha} \tag{2.28}$$

(2)
$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \tag{2.29}$$

定理 2.3.4　设 $A\in F(X)$，$\lambda\in[0,1]$，则：

(1)
$$(A')_{\lambda}=(A_{\underset{\cdot}{1-\lambda}})' \tag{2.30}$$

(2)
$$(A')_{\underset{\cdot}{\lambda}}=(A_{1-\lambda})' \tag{2.31}$$

证明　只证(1)，(2)的证明类似.

$\forall x\in(A')_{\lambda}\Leftrightarrow A'(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow 1-A(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow A(x)\leqslant 1-\lambda\Leftrightarrow A(x)\not> 1-\lambda\Leftrightarrow x\notin A_{\underset{\cdot}{1-\lambda}}\Leftrightarrow x\in(A_{\underset{\cdot}{1-\lambda}})'$.

所以 $(A')_{\lambda}=(A_{1-\underset{\cdot}{\lambda}})'$.

定义 2.3.2　设 $A\in F(X)$，$\lambda\in[0,1]$，$\forall x\in X$ 定义

$$(\lambda A)(x)=\lambda\wedge A(x) \tag{2.32}$$

则 $\lambda A\in F(X)$，称为数 λ 和 A 的乘积.

如图 2.4 所示.

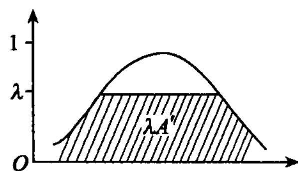


图 2.4

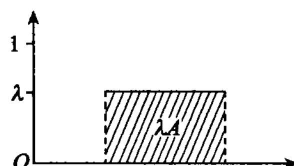


图 2.5

显然，(1)若 $A\subseteq B$，则 $\lambda A\subseteq\lambda B$.

(2)若 $\lambda\leqslant\mu$，则 $\lambda A\subseteq\mu A$.

特别地，若 $A\in P(X)$，则

$$(\lambda A)(x)=\begin{cases}\lambda, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

且 $\lambda A\in F(X)$.

定理 2.3.5（分解定理 1）　如图 2.5 所示. 设 $A\in F(X)$，则

$$A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{\lambda} \tag{2.33}$$

证明　$\forall x\in X$，有

$$\begin{aligned}\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{\lambda}\Big)(x)&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_{\lambda}(x))\\&=\Big(\bigvee_{0\leqslant\lambda\leqslant A(x)}\lambda\wedge A_{\lambda}(x)\Big)\vee\Big(\bigvee_{A(x)<\lambda\leqslant 1}\lambda\wedge A_{\lambda}(x)\Big)\end{aligned}$$

$$= \bigvee_{\lambda \leqslant A(x)} \lambda = A(x)$$

所以
$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\lambda}$$

定理 2.3.6(分解定理 2) 设 $A \in F(X)$,则

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{2.34}$$

证明与定理 2.3.5 类似,从略.

推论 2.3.1 设 $A \in F(X)$,$L \subseteq [0,1]$,L 是稠密子集,则

$$A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\lambda} = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

定理 2.3.7(分解定理 3) 设 $A \in F(X)$,映射 $H:[0,1] \to P(X)$ 满足:$\forall \lambda \in [0,1]$,$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_{\lambda}$,则:

(1)
$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda) \tag{2.35}$$

(2)$\lambda < \mu$,则 $H(\mu) \subseteq H(\lambda)$.

(3)$\forall \lambda \in [0,1]$,有

$$A_{\lambda} = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \tag{2.36}$$

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha) \tag{2.37}$$

证明 (1)由于 $\forall \lambda \in [0,1]$,$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_{\lambda}$,则 $\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \lambda H(\lambda) \subseteq \lambda A_{\lambda}$,从而

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\lambda} = A$$

所以 $A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda)$.

(2)若 $\lambda < \mu$,则 $H(\mu) \subseteq A_{\mu} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda)$,所以 $H(\mu) \subseteq H(\lambda)$.

(3)对于 $\lambda \in [0,1]$,$\forall \alpha \in [0,1]$,当 $\alpha < \lambda$ 时,$A_{\lambda} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha)$,从而

$$A_{\lambda} \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha).$$

另一方面,$\forall \alpha \in [0,1]$,$H(\alpha) \subseteq A_{\alpha}$,从而 $\bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} A_{\alpha} = A_{\lambda}$,所以

$$A_{\lambda} = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha).$$

同理证明 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha)$.

§2.4 模糊集的表现定理

定义 2.4.1 映射 $H:[0,1] \to P(X)$,$\lambda \to H(\lambda)$ 满足:$\forall \lambda, \mu \in [0,1]$,若 $\lambda \leqslant \mu$,则 $H(\mu) \subseteq H(\lambda)$,称 H 为 X 上的集合套.

X 上的集合套全体记为 $H(X)$.

在 $H(X)$ 中定义关系"$\subseteq$",$\forall H_1, H_2 \in H(X)$,若 $\forall \lambda \in [0,1]$,$H_1(\lambda) \subseteq H_2(\lambda)$,则称 H_2 包含 H_1,记为 $H_1 \subseteq H_2$. 若 $\forall \lambda \in [0,1]$,$H_1(\lambda) = H_2(\lambda)$,则称 H_1 和 H_2 相等,记为 $H_1 = H_2$.

不难验证$(H(X), \subseteq)$是偏序集.

定义 2.4.2　设 $H_1, H_2 \in H(X)$，定义运算：

(1)
$$(H_1 \cup H_2)(\lambda) = H_1(\lambda) \cup H_2(\lambda) \tag{2.38}$$

(2)
$$(H_1 \cap H_2)(\lambda) = H_1(\lambda) \cap H_2(\lambda) \tag{2.39}$$

(3)
$$H'(\lambda) = (H(1-\lambda))' \tag{2.40}$$

分别称为 H_1 和 H_2 的并、交及 H 的余.

一般地，$\{H_t \mid t \in T\} \subseteq H(X)$，令 $\lambda \in [0,1]$，则：

(1)
$$(\bigcup_{t\in T} H_t)(\lambda) = \bigcup_{t\in T} H_t(\lambda) \tag{2.41}$$

(2)
$$(\bigcap_{t\in T} H_t)(\lambda) = \bigcap_{t\in T} H_t(\lambda) \tag{2.42}$$

易证 $\bigcup_{t\in T} H_t, \bigcap_{t\in T} H_t \in H(X)$.

定理 2.4.1　代数系统$(H(X), \cap, \cup, ')$是具有最大元 $\overline{X}$ 和最小元$\overline{\varnothing}$的软代数. 其中，$\overline{X}$ 和$\overline{\varnothing}$分别定义为 $\forall \lambda \in [0,1]$，$\overline{X}(\lambda) = X, \overline{\varnothing}(\lambda) = \varnothing$.

证明　由于 $H(X)$中的$\cup$、$\cap$运算是由 $\lambda \in [0,1]$时集合的并、交定义的，所以 $H(X)$具有最大元 $\overline{X}$ 和最小元$\overline{\varnothing}$的分配格. 现验证对合律和对偶律. $\forall \lambda \in [0,1]$，则

$$(H')'(\lambda) = (H'(1-\lambda))' = ((H(\lambda))')' = H(\lambda)，故(H')' = H.$$

$$\begin{aligned}(H_1 \cup H_2)'(\lambda) &= ((H_1 \cup H_2)(1-\lambda))' = (H_1(1-\lambda) \cup H_2(1-\lambda))' \\ &= (H_1(1-\lambda))' \cap (H_2(1-\lambda))' = H_1'(\lambda) \cap H_2'(\lambda) \\ &= (H_1' \cap H_2')(\lambda)\end{aligned}$$

故$(H_1 \cup H_2)' = H_1' \cap H_2'$；同理$(H_1 \cap H_2)' = H_1' \cup H_2'$.

所以$(H(X), \cup, \cap, ')$是软代数.

定理 2.4.2(表现定理 3)　设$f: H(X) \to F(X)$，$\forall H \in H(X)$，有

$$f(H) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda) \tag{2.43}$$

则f是代数系统$(H(X), \cup, \cap, ')$到代数系统$(F(X), \cup, \cap, ')$的满同态映射，且f满足：

(1)
$$(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq (f(H))_{\lambda} \tag{2.44}$$

(2)
$$(f(H))_{\lambda} = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) \tag{2.45}$$

(3)
$$(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha) \tag{2.46}$$

证明　由于$\forall H \in H(X)$，$f(H) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda) \in F(X)$被唯一确定，所以$f$是 $H(X)$到 $F(X)$的映射.

另外，$\forall A \in F(X)$，取 $H(\lambda) = A_{\lambda}$，则 $H \in H(X)$且

$$f(H) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda A_{\lambda} = A$$

所以f是 $H(X)$到 $F(X)$的满射.

现证式(2.44)，若 $x \in H(\lambda)$，则 $H(\lambda)(x) = 1$，由此

$$f(H)(x) = (\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda))(x) = \bigvee_{\lambda\in[0,1]} (\lambda \wedge H(\lambda)(x))$$

$$\geqslant \lambda \wedge H(\lambda)(x) = \lambda \wedge 1 = \lambda$$

所以 $x \in (f(H))_\lambda$，即 $H(\lambda) \subseteq (f(H))_\lambda$.

另一方面，设 $x \notin H(\lambda)$ 则 $H(\lambda)(x) = 0$，而且当 $\alpha > \lambda$ 时，$H(\alpha)(x) = 0$，从而

$$\begin{aligned} f(H)(x) &= (\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha H(\alpha))(x) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \alpha \wedge H(\alpha)(x) \\ &= (\bigvee_{0 \leqslant \alpha \leqslant \lambda} \alpha \wedge H(\alpha)(x)) \vee (\bigvee_{\lambda < \alpha \leqslant 1} \alpha \wedge H(\alpha)(x)) \\ &= \bigvee_{0 \leqslant \alpha \leqslant \lambda} \alpha \wedge H(\alpha)(x) \leqslant \bigvee_{\alpha \leqslant \lambda} \alpha = \lambda \end{aligned}$$

即 $f(H)(x) \ngtr \lambda$，于是 $x \notin (f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，即证明了 $x \notin H(\lambda)$，则 $x \notin (f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，所以 $(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda)$. 由此

$$(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq (f(H))_\lambda.$$

由分解定理 3 立即可得式(2.45)和式(2.46).

最后证 f 是同态映射.

$\forall \ \{H_t | t \in T\} \subseteq H(X)$,

$$\begin{aligned} (f(\bigcup_{t \in T} H_t))_{\underset{\cdot}{\lambda}} &= \bigcup_{\alpha > \lambda} (\bigcup_{t \in T} H_t)(\alpha) = \bigcup_{\alpha > \lambda} (\bigcup_{t \in T} H_t(\alpha)) = \bigcup_{t \in T} (\bigcup_{\alpha > \lambda} H_t(\alpha)) \\ &= \bigcup_{t \in T} (f(H_t))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = (\bigcup_{t \in T} f(H_t))_{\underset{\cdot}{\lambda}} \end{aligned}$$

所以 $f(\bigcup_{t \in T} A_t) = \bigcup_{t \in T} f(H_t)$.

$$\begin{aligned} (f(\bigcap_{t \in T} H_t))_\lambda &= \bigcap_{\alpha < \lambda} (\bigcap_{t \in T} H_t)(\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} \bigcap_{t \in T} H_t(\alpha) = \bigcap_{t \in T} \bigcap_{\alpha < \lambda} H_t(\alpha) \\ &= \bigcap_{t \in T} (f(H_t))_\lambda = (\bigcap_{t \in T} f(H_t))_\lambda \end{aligned}$$

所以 $f(\bigcap_{t \in T} H_t) = \bigcap_{t \in T} f(H_t)$.

$$\begin{aligned} (f(H'))_\lambda &= \bigcap_{\alpha < \lambda} H'(\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} (H(1-\alpha))' = (\bigcup_{1-\lambda < 1-\alpha} H(1-\alpha))' \\ &= (\bigcup_{\beta > 1-\lambda} H(\beta))' = (f(H)_{\underset{\cdot}{1-\lambda}})' = ((f(H))')_\lambda \end{aligned}$$

所以 $f(H') = (f(H))'$.

由此，f 是 $H(X)$ 到 $F(X)$ 的满同态映射.

定理 2.4.2 说明代数系统 $H(X)$ 和 $F(X)$ 之间是满同态的关系，即不同的集合套可以对应于同一个模糊集，为了刻画它们之间的同构关系，我们在 $H(X)$ 中引入一个等价关系.

设 $f: H(X) \to F(X)$ 是满同态，$\forall H_1, H_2 \in H(X)$.

$$H_1 \sim H_2 \Leftrightarrow f(H_1) = f(H_2)$$

易证"$\sim$"是 $H(X)$ 中的等价关系，于是得商集

$$H^*(X) = H(X)/\sim = \{[H] | H \in H(X)\}$$

$$[H] = \{H_1 | H_1 \sim H, H_1 \in H(X)\}.$$

定理 2.4.3 设 $H_1, H_2 \in H(X)$，则 $H_1 \sim H_2$ 的充分必要条件是下列条件之一成立，$\forall \lambda \in [0,1]$

(1)
$$\bigcap_{\alpha < \lambda} H_1(\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} H_2(\alpha) \tag{2.47}$$

(2)
$$\bigcup_{\alpha>\lambda} H_1(\alpha) = \bigcup_{\alpha>\lambda} H_2(\alpha) \tag{2.48}$$

证明　因为 $H_1 \sim H_2 \Leftrightarrow f(H_1) = f(H_2) \Leftrightarrow (f(H_1))_\lambda = (f(H_2))_\lambda$

$$(f(H_1))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = (f(H_2))_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

由式(2.45)、式(2.46)得

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} H_1(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda} H_2(\alpha) (\bigcup_{\alpha>\lambda} H_1(\alpha)) = \bigcup_{\alpha>\lambda} H_2(\alpha).$$

为了在 $H^*(X)$ 中定义并、交、余运算，首先证明运算与代表无关，即证

$$\forall H_t \sim H_t^* \ (t \in T), H \sim H^*$$

有：

(1) $\bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T} H_t)(\alpha) = \bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T} H_t^*)(\alpha)$;

(2) $\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcap_{t\in T} H_t)(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcap_{t\in T} H_t^*)(\alpha)$;

(3) $\bigcap_{\alpha<\lambda} H'(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda}(H^*)'(\alpha)$.

因为

$$\begin{aligned}\bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T} H_t)(\alpha) &= \bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T} H_t(\alpha)) = \bigcup_{t\in T}(\bigcup_{\alpha>\lambda} H_t(\alpha)) \\ &= \bigcup_{t\in T}(\bigcup_{\alpha>\lambda} H_t^*(\alpha)) = \bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T} H_t^*(\alpha)) = \bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T} H_t^*)(\alpha)\end{aligned}$$

所以 $\bigcup_{t\in T} H_t \sim \bigcup_{t\in T} H_t^*$.

同理可证
$$\bigcap_{t\in T} H_t \sim \bigcap_{t\in T} H_t^*.$$

另外

$$\begin{aligned}\bigcap_{\alpha<\lambda} H'(\alpha) &= \bigcap_{\alpha<\lambda}(H(1-\alpha))' = (\bigcup_{\alpha<\lambda} H(1-\alpha))' = (\bigcup_{\alpha<\lambda} H^*(1-\alpha))' \\ &= \bigcap_{\alpha<\lambda}(H^*(1-\alpha))' = \bigcap_{\alpha<\lambda}(H^*)'(\alpha)\end{aligned}$$

所以 $H' \sim (H^*)'$.

由此在 $H^*(X)$ 中定义运算：

(1)
$$\bigcup_{t\in T}[H_t] = [\bigcup_{t\in T} H_t] \tag{2.49}$$

(2)
$$\bigcap_{t\in T}[H_t] = [\bigcap_{t\in T} H_t] \tag{2.50}$$

(3)
$$[H]' = [H'] \tag{2.51}$$

定理 2.4.4　设 $f: H(X) \to F(X)$，$\forall H \in H(X)$，有

$$f(H) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda)$$

则由 f 诱导的映射 $f^*: H^*(X) \to F(X)$，$\forall [H] \in H^*(X)$，

$$f^*([H]) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda) \tag{2.52}$$

是代数系统 $(H^*(X), \cup, \cap, ')$ 到代数系统 $(F(X), \cup, \cap, ')$ 的同构映射，记为

$$H^*(X) \cong F(X).$$

下面介绍表现定理 1 和表现定理 2.

定义 2.4.3　(1) 设 $F \in H(X)$，若 F 满足：$\forall \{\lambda_t | t \in T\} \subseteq [0,1]$

$$F(0)=X,F(\bigvee_{t\in T}\lambda_t)=\bigcap_{t\in T}F(\lambda_t)$$

则称 F 是 X 上的一个集轮，X 上的所有集轮记为 $\Phi(X)$.

(2)设 $\underset{\cdot}{F}\in H(X)$，若 $\underset{\cdot}{F}$ 满足：$\forall\{\lambda_t|t\in T\}\subseteq[0,1]$

$$\underset{\cdot}{F}(1)=\varnothing,\underset{\cdot}{F}(\bigwedge_{t\in T}\lambda_t)=\bigcup_{t\in T}\underset{\cdot}{F}(\lambda_t)$$

则称 $\underset{\cdot}{F}$ 是 X 上的一个开集轮，X 上的所有开集轮记为 $\Phi^*(X)$.

例如，$A\in F(X)$，A 的 λ 截集满足(1)，所以，$\forall\lambda\in[0,1]$，$F(\lambda)=A_\lambda$ 是 λ 上的一个集轮；同样 A 的 λ 强截集 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 满足(2)，所以 $\forall_\lambda\in[0,1]$，$\underset{\cdot}{F}(\lambda)=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 是 X 上的一个开集轮.

定理 2.4.5 设$[H]\in H^*(X)$，则

(1)唯一存在集轮 $F_H\in[H]$

$$F_H(\lambda)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)\tag{2.53}$$

(2)唯一存在开集轮 $\underset{\cdot}{F}_H\in[H]$

$$\underset{\cdot}{F}_H(\lambda)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)\tag{2.54}$$

(3) $\underset{\cdot}{F}_H\subseteq H\subseteq F_H(H\in[H])$ (2.55)

证明 由定理2.4.3知，等价类$[H]$中 $\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)$ 和 $\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)$ 的唯一性，决定了 F_H 和 $\underset{\cdot}{F}_H$ 的唯一性. 要证 $F_H\in[H]$，只须证 $f(F_H)=f(H)$.

$$(f(F_H))_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}F_H(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)=\bigcap_{\beta<\lambda}H(\beta)=(f(H))_\lambda$$

所以 $f(F_H)=f(H)$，从而 $F_H\in[H]$.

又因为 $F_H(0)=H(0)=X$，$F_H(\lambda)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}F_H(\alpha)$，故 F_H 是集轮.

同理证明 $\underset{\cdot}{F}_H$ 是开集轮，且 $\underset{\cdot}{F}_H\in[H]$.

$\forall\lambda\in[0,1]$，若 $\alpha<\lambda$，$H(\lambda)\subseteq H(\alpha)$，则 $H(\lambda)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)$，即 $H(\lambda)\subseteq F_H(\lambda)$，所以 $H\subseteq F_H$. 同理证明 $\underset{\cdot}{F}_H\subseteq H$.

由式(2.55)知，集合 X 上的集轮 F_H 与开集轮 $\underset{\cdot}{F}_H$ 分别是等价类$[H]$中的最大代表和最小代表. 又因为等价类$[H]$中的并、交、余运算与代表无关，不难验证映射 $f:\Phi(X)(\Phi^*(X))\to H^*(X)$，$f(\underset{\cdot}{F}_H)=[H]$，$(f(F_H)=[H])$ 是同构映射，由此得以下定理.

定理 2.4.6 集合 X 上的集轮、开集轮与集合套等价类同构，即：

(1)$(\Phi(X),\cap,\cup,')\cong(H^*(X),\cap,\cup,')$；

(2)$(\Phi^*(X),\cap,\cup,')\cong(H^*(X),\cap,\cup,')$.

推论 2.4.1(表现定理1) 设 $f:\Phi(X)\to F(X)$，有

$$f(F_H)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda F_H(\lambda)\tag{2.56}$$

则 f 是 $\Phi(X)$ 到 $F(X)$ 的同构映射，即 $\Phi(X)\cong F(X)$.

推论 2.4.2(表现定理 2)　设$f:\Phi^*(X)\to F(X)$,有

$$f(F_H)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda F_H(\lambda) \tag{2.57}$$

则f是$\Phi^*(X)$到$F(X)$的同构映射,即$\Phi^*(X)\cong F(X)$.

§2.5　模糊集的扩张原理

设X,Y是论域,$f:X\to Y$是映射,则f可以诱导一个从$P(X)$到$P(Y)$的映射(变换),仍然记为$f:P(X)\to P(Y)$

$$A\to f(A)\triangleq\{f(x)\mid x\in A\} \tag{2.58}$$

同样f诱导一个$P(Y)$到$P(X)$的映射(变换),记为$f^{-1}:P(Y)\to P(X)$

$$B\to f^{-1}(B)\triangleq\{x\in X\mid f(x)\in B\} \tag{2.59}$$

称$f(A)$为A的像,$f^{-1}(B)$为B的原像.

如图 2.6、图 2.7 所示,显然,像集和原像集满足:

(1)$f^{-1}(f(A))\supseteq A$,当f是单射时,等式成立;

(2)$f(f^{-1}(B))\subseteq B$,当f是满射时,等式成立.

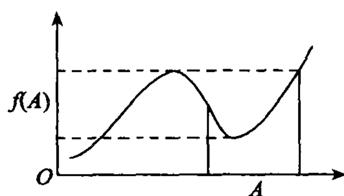


图 2.6

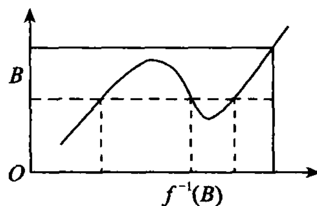


图 2.7

定义 2.5.1　(扩张原理 1)　设$f:X\to Y$,则f诱导的映射$f:F(X)\to F(Y)$

$$A\to f(A)\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda) \tag{2.60}$$

称为f诱导的$F(X)$到$F(Y)$的映射,也称f诱导的从X到Y的模糊变换,简称F变换,$f(A)$称为A的像.

由f诱导的映射$f^{-1}:F(Y)\to F(X)$

$$B\to f^{-1}(B)\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda) \tag{2.61}$$

称为f诱导的$F(Y)$到$F(X)$的映射,也称为f诱导的从Y到X的模糊变换,$f^{-1}(B)$称为B的原像.

对于$\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$.

若$\lambda_1\leqslant\lambda_2$,$A_{\lambda_2}\subseteq A_{\lambda_1}$,则$f(A_{\lambda_2})\subseteq f(A_{\lambda_1})$.

若$\lambda_1\leqslant\lambda_2$,$B_{\lambda_2}\subseteq B_{\lambda_1}$,则$f^{-1}(B_{\lambda_2})\subseteq f^{-1}(B_{\lambda_1})$.

所以$f(A_\lambda)$,$f^{-1}(B_\lambda)$($\lambda\in[0,1]$)分别是Y中和X中的集合套,由此定义 2.

5.1 是合理的.

定理 2.5.1 设 $f:X\to Y$.

(1)若 $A\in F(X)$,则 $\forall y\in Y$

$$f(A)(y)=\bigvee_{f(x)=y}A(x) \tag{2.62}$$

特别地,若 $\{x\in X\mid f(x)=y\}=\varnothing$,规定 $f(A)(y)=0$.

(2)若 $B\in F(Y)$,则 $\forall x\in X$

$$f^{-1}(B)(x)=B(f(x)) \tag{2.63}$$

证明 (1)

$$\begin{aligned}f(A)(y)&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda)(y)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda\wedge f(A_\lambda)(y)\\&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda\mid y\in f(A_\lambda)\}=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda\mid\exists x\in A_\lambda,f(x)=y\}\\&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\bigvee_{f(x)=y}\{\lambda\mid\exists x\in A_\lambda\}=\bigvee_{f(x)=y}\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda\mid\exists x\in A_\lambda\}\\&=\bigvee_{f(x)=y}\Big(\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda\wedge A_\lambda(x)\Big)=\bigvee_{f(x)=y}A(x)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}f^{-1}(B)(x)&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda)(x)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge f^{-1}(B_\lambda)(x))\\&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda\mid x\in f^{-1}(B_\lambda)\}=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda\mid f(x)\in B_\lambda\}\\&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge B_\lambda(f(x)))=B(f(x)).\end{aligned}$$

定理 2.5.2(扩张原理 2) 设 $f:X\to Y$.

(1)若 $A\in F(X)$,则

$$f(A)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}}) \tag{2.64}$$

(2)若 $B\in F(Y)$,则

$$f^{-1}(B)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\lambda}}) \tag{2.65}$$

用类似于定理 2.5.1 的证明方法,只须验证

$$f(A)(y)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}})(y)=\bigvee_{f(x)=y}A(x)$$

$$f^{-1}(B)(x)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\lambda}})(x)=B(f(x)).$$

定理 2.5.3(扩张原理 3) 设 $f:X\to Y$.

(1)若 $A\in F(X)$,则

$$f(A)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(H_A(\lambda)) \tag{2.66}$$

其中 H_A 满足:$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H_A(\lambda)\subseteq A_\lambda$.

(2)若 $B\in F(Y)$,则

$$f^{-1}(B)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(H_B)(\lambda) \tag{2.67}$$

其中 H_B 满足:$B_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H_B(\lambda)\subseteq B_\lambda$.

定理 2.5.4(复合映射的扩张原理) 设 $f:X\to Y$,$g:Y\to Z$,$g\circ f:X\to Z$ 是 f 和 g 的复合映射,则

(1) $\forall A\in F(X)$,有

$$(g\circ f)(A)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda g(f(A_\lambda))\tag{2.68}$$

(2) $\forall B\in F(Y)$，有

$$(g\circ f)^{-1}(B)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(g^{-1}(B_\lambda))\tag{2.69}$$

证明　(1) 只须证明 $(g\circ f)(A_\lambda)=g(f(A_\lambda))$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(A_\lambda)&=\{z\in Z\mid\exists x\in A_\lambda,(g\circ f)(x)=g(f(x))=z\}\\&=\{z\in Z\mid\exists x\in A_\lambda,f(x)=y,g(y)=z\}\\&=\{z\in Z\mid\exists y\in f(A_\lambda),g(y)=z\}\\&=\{z\in Z\mid\exists z\in g(f(A_\lambda))\}\\&=g(f(A_\lambda))\end{aligned}$$

所以 $(g\circ f)(A)=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda g(f(A_\lambda))$.

同理证明(2).

定理 2.5.5　设 $f:X\to Y$.

(1) 若 $A\in F(X)$，则 $f^{-1}(f(A))\supseteq A$，当 f 是单射时等号成立；

(2) 若 $B\in F(Y)$，则 $f(f^{-1}(B))\subseteq B$，当 f 是满射时等号成立.

证明　(1) $\forall x\in X$，

$$f^{-1}(f(A))(x)=f(A)(f(x))=\bigvee_{f(t)=f(x)}A(t)\geqslant A(x)$$

当 f 是单射时，$\bigvee\limits_{f(t)=f(x)}A(t)=A(x)$. 所以当 f 是单射时，$f^{-1}(f(A))=A$.

(2) $\forall y\in Y$，

$$\begin{aligned}f(f^{-1}(B))(y)&=\bigvee_{f(x)=y}f^{-1}(B)(x)=\bigvee_{f(x)=y}B(f(x))\\&=\begin{cases}B(y), & \exists x\in X,f(x)=y\\0, & \forall x\in X,f(x)\neq y\end{cases}\leqslant B(y)\end{aligned}$$

当 f 是满射时，上式为 0 的情况不成立，故 $f(f^{-1}(B))(y)=B(y)$，所以 f 是满射时

$$f(f^{-1}(B))=B.$$

§2.6　模糊集的多元扩张原理

定理 2.6.1　设 $A_i\in P(X_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$，则笛卡儿积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的特征函数，$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$，有

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\bigwedge_{i=1}^{n}A_i(x_i)\tag{2.70}$$

证明　$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1\Leftrightarrow(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\Leftrightarrow\forall_i,x_i\in A_i\Leftrightarrow\forall_i,A_i(x_i)=1\Leftrightarrow\bigwedge\limits_{i=1}^{n}A_i(x_i)=1$.

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\Leftrightarrow(x_1,x_2,\cdots,x_n)\notin A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\Leftrightarrow\exists i,x_i\notin A_i\Leftrightarrow\exists i,A_i(x_i)=0\Leftrightarrow\bigwedge\limits_{i=1}^{n}A_i(x)=0$

所以 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i(x_i)$

设 $A^{(i)} \in F(X_i)$，$\forall \lambda, \mu \in [0,1]$，若 $\lambda \leqslant \mu$，则 $A_{\mu}^{(i)} \subseteq A_{\lambda}^{(i)}$，于是

$$A_{\mu}^{(1)} \times A_{\mu}^{(2)} \times \cdots \times A_{\mu}^{(n)} \subseteq A_{\lambda}^{(1)} \times A_{\lambda}^{(2)} \times \cdots \times A_{\lambda}^{(n)}$$

所以 $\{A_{\lambda}^{(1)} \times A_{\lambda}^{(2)} \times \cdots \times A_{\lambda}^{(n)} \mid \lambda \in [0,1]\}$ 是 $P(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)$ 上的集合套，由此给出 F 集的笛卡儿积的定义.

定义 2.6.1 设 $A^{(i)} \in F(X_i)(i = 1,2,\cdots,n)$，则

$$A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda (A_{\lambda}^{(1)} \times A_{\lambda}^{(2)} \times \cdots \times A_{\lambda}^{(n)}) \tag{2.71}$$

称为 F 集 $A^{(i)}(i = 1,2,\cdots,n)$ 的笛卡儿积，简称直积.

定理 2.6.2 设 $A^{(i)} \in F(X_i)(i = 1,2,\cdots,n)$ 则

$$A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} A^{(i)}(x_i) \tag{2.72}$$

证明 $A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda (A_{\lambda}^{(1)} \times A_{\lambda}^{(2)} \times \cdots \times A_{\lambda}^{(n)})(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge (A_{\lambda}^{(1)} \times A_{\lambda}^{(2)} \times \cdots \times A_{\lambda}^{(n)})(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} A_{\lambda}^{(i)}(x_i)) \leqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge A_{\lambda}^{(i)}(x_i))$$

若等号不成立，则 $\exists \alpha \in [0,1]$ 使

$$\bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} A_{\lambda}^{(i)}(x_i)) < \alpha < \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge A_{\lambda}^{(i)}(x_i))$$

由于 $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_{\lambda}^{(i)}(x_i) \in \{0,1\}$，则：

若 $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_{\lambda}^{(i)}(x_i) = 1$，则 $\alpha > \bigvee\limits_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge (\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_{\lambda}^{(i)}(x_i)) \geqslant \alpha \wedge (\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_{\alpha}^{(i)}(x_i)) = \alpha$，矛盾；

若 $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_{\lambda}^{(i)}(x_i) = 0$，则 $\exists i_0, A_{\alpha}^{(i_0)}(x_{i_0}) = 0$，则 $\forall \lambda \geqslant \alpha$ 时，$A_{\lambda}^{(i_0)}(x_{i_0}) = 0$，于是

$\alpha < \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \bigvee\limits_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge A_{\lambda}^{(i)}(x_i)) \leqslant \bigvee\limits_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge A_{\lambda}^{(i_0)}(x_{i_0}) = \bigvee\limits_{\lambda \in [0,\alpha]} \lambda \wedge A_{\lambda}^{(i_0)}(x_{i_0}) \leqslant \alpha$，矛盾.

由此，$A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge A_{\lambda}^{(i)}(x_i)) = \bigwedge_{i=1}^{n} A^{(i)}(x_i).$$

定理 2.6.3 设 $A^{(i)} \in F(X_i)(i = 1,2,\cdots,n)$，则：

(1)
$$(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})_{\lambda} = A_{\lambda}^{(1)} \times A_{\lambda}^{(2)} \times \cdots \times A_{\lambda}^{(n)} \tag{2.73}$$

(2)
$$(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(1)} \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(2)} \times \cdots \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(n)} \tag{2.74}$$

证明 (1) $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$

$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})_{\lambda} \Leftrightarrow$

$(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} A^{(i)}(x_i) \geqslant \lambda \Leftrightarrow \forall i, A^{(i)}(x_i) \geqslant \lambda$

$$\Leftrightarrow \forall i, x_i \in A_{\lambda}^{(i)} \Leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A_{\lambda}^{(1)} \times A_{\lambda}^{(2)} \times \cdots \times A_{\lambda}^{(n)}$$

所以$(A^{(1)}\times A^{(2)}\times\cdots\times A^{(n)})_\lambda=A_\lambda^{(1)}\times A_\lambda^{(2)}\times\cdots\times A_\lambda^{(n)}$.

同理证明(2).

推论 2.6.1 设$A^{(i)}\in F(X_i)(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$A^{(1)}\times A^{(2)}\times\cdots\times A^{(n)}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda^{(1)}\times A_\lambda^{(2)}\times\cdots\times A_\lambda^{(n)}).$$

推论 2.6.2 设$A^{(i)}\in F(X_i)(i=1,2,\cdots,n)$,若$\forall\lambda\in[0,1]A_\lambda^{(i)}\subseteq H_A^{(i)}(\lambda)\subseteq A_\lambda^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$,则:

$$A^{(1)}\times A^{(2)}\times\cdots\times A^{(n)}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(H_A^{(1)}(\lambda)\times H_A^{(2)}(\lambda)\times\cdots\times H_A^{(n)}(\lambda)).$$

下面介绍多元扩张原理.

定理 2.6.4 设$X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,Y=Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_m,f:X\to Y,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$则:

(1)f诱导映射$f:P(X_1)\times P(X_2)\times\cdots\times P(X_n)\to P(Y)$,$\forall(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in P(X_1)\times P(X_2)\times\cdots\times P(X_n)$

$$f(A_1,A_2,\cdots,A_n)=f(A_1\times A_2\times\cdots\times A_n).$$

(2)f诱导映射$f^{-1}:P(Y_1)\times P(Y_2)\times\cdots\times P(Y_m)\to P(X)$,$\forall(B_1,B_2,\cdots,B_m)\in P(Y_1)\times P(Y_2)\times\cdots\times P(Y_m)$

$$f^{-1}(B_1,B_2,\cdots,B_m)=f^{-1}(B_1\times B_2\times\cdots\times B_m).$$

证明 (1)
$$\begin{aligned}f(A_1,A_2,\cdots,A_n)&=\{y\mid\exists(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y\}\\&=f(A_1\times A_2\times\cdots\times A_n)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}f^{-1}(B_1,B_2,\cdots,B_m)&=\{x\mid f(x)\in(B_1,B_2,\cdots,B_m)\}\\&=\{x\mid f(x)\in B_1\times B_2\times\cdots\times B_m\}\\&=f^{-1}(B_1\times B_2\times\cdots\times B_m)\end{aligned}$$

我们称$f(A_1\times A_2\times\cdots\times A_n)$为$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$的像,称$f^{-1}(B_1\times B_2\times\cdots\times B_m)$为$(B_1,B_2,\cdots,B_m)$的原像.

定义 2.6.2 设$X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,Y=Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_m,f:X\to Y,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$,则:

(1)f诱导映射$f:F(X_1)\times F(X_2)\times\cdots\times F(X_n)\to F(Y)$,

$(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})\to f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})\triangleq f(A^{(1)}\times A^{(2)}\times\cdots\times A^{(n)})$.

(2)f诱导映射的$f^{-1}:F(Y_1)\times F(Y_2)\times\cdots\times F(Y_m)\to F(X)$,

$(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})\to f^{-1}(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})\triangleq f^{-1}(B^{(1)}\times B^{(2)}\times\cdots\times B^{(m)})$. 则称$f(A^{(1)}\times A^{(1)}\times\cdots\times A^{(n)})$为$(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})$的像,称$f^{-1}(B^{(1)}\times B^{(2)}\times\cdots\times B^{(m)})$为$(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})$的原像.

定理 2.6.5 设$f:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_m,(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})\in F(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n),(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})\in F(Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_m)$,则:

(1) $$f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})(y)=\bigvee_{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y}(\bigwedge_{i=1}^{n}A^{(i)}(x_i)) \tag{2.75}$$

(2) $$f^{-1}(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})(x)=\bigwedge_{i=1}^{n}B^{(i)}(y_i) \tag{2.76}$$

其中 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 且 $f(x)=y$.

证明 (1) $f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})(y)=f(A^{(1)}\times A^{(2)}\times\cdots\times A^{(n)})(y)$

$$=\bigvee_{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y}(A^{(1)}\times A^{(2)}\times\cdots\times A^{(n)})(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\bigvee_{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y}(\bigwedge_{i=1}^{n}A^{(i)}(x_i)).$$

(2) $f^{-1}(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})(x)=f^{-1}(B^{(1)}\times B^{(2)}\times\cdots\times B^{(m)})(x)$

$$=(B^{(1)}\times B^{(2)}\times\cdots\times B^{(m)})(y)=\bigwedge_{i=1}^{n}B^{(i)}(y_i).$$

推论 2.6.3 设 $*$ 是 X 中的二元运算，$A,B\in F(X)$，则 $\forall z\in X$

$$(A*B)(z)=\bigvee_{x*y=z}(A(x)\wedge B(y)) \tag{2.77}$$

定理 2.6.6(多元扩张原理 1) 设 $f:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_m$，$(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})\in F(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)$，$(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})\in F(Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_m)$，则：

(1) $$f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda^{(1)}\times A_\lambda^{(2)}\times\cdots\times A_\lambda^{(n)})$$
$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda^{(1)},A_\lambda^{(2)},\cdots,A_\lambda^{(n)}) \tag{2.78}$$

(2) $$f^{-1}(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda^{(1)}\times B_\lambda^{(2)}\times\cdots\times B_\lambda^{(m)})$$
$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda^{(1)},B_\lambda^{(2)},\cdots,B_\lambda^{(m)}) \tag{2.79}$$

证明 (1) $f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})=f(A^{(1)}\times A^{(2)}\times\cdots\times A^{(n)})$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A^{(1)}\times A^{(2)}\times\cdots\times A^{(n)})_\lambda=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda^{(1)}\times A_\lambda^{(2)}\times\cdots\times A_\lambda^{(n)})$$

又因为 $f(A_\lambda^{(1)},A_\lambda^{(2)},\cdots,A_\lambda^{(n)})=f(A_\lambda^{(1)}\times A_\lambda^{(2)}\times\cdots\times A_\lambda^{(n)})$

所以 $f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda^{(1)},A_\lambda^{(2)},\cdots,A_\lambda^{(n)})$.

同理证明(2).

定理 2.6.7(多元扩张原理 2) 设 $f:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_m$. $(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})\in F(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)$，$(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})\in F(Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_m)$，则：

(1) $$f(A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n)})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_{\dot\lambda}^{(1)}\times A_{\dot\lambda}^{(2)}\times\cdots\times A_{\dot\lambda}^{(n)})$$
$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_{\dot\lambda}^{(1)},A_{\dot\lambda}^{(2)},\cdots,A_{\dot\lambda}^{(n)}) \tag{2.80}$$

(2) $$f^{-1}(B^{(1)},B^{(2)},\cdots,B^{(m)})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_{\dot\lambda}^{(1)}\times B_{\dot\lambda}^{(2)}\times\cdots\times B_{\dot\lambda}^{(m)})$$
$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_{\dot\lambda}^{(1)},B_{\dot\lambda}^{(2)},\cdots,B_{\dot\lambda}^{(m)}) \tag{2.81}$$

定理 2.6.7 的证明类似于定理 2.6.6.

定理 2.6.8（多元扩张原理 3）　设 $f: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m$，$(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}) \in F(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)$，$(B^{(1)} \times B^{(2)} \times \cdots \times B^{(m)}) \in F(Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m)$，则：

$$(1)\ f(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(H_A^{(1)}(\lambda) \times H_A^{(2)}(\lambda) \times \cdots \times H_A^{(n)}(\lambda))$$
$$= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(H_A^{(1)}(\lambda), H_A^{(2)}(\lambda), \cdots, H_A^{(n)}(\lambda)) \quad (2.82)$$

$$(2)\ f^{-1}(B^{(1)}, B^{(2)}, \cdots, B^{(m)}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(H_B^{(1)}(\lambda) \times H_B^{(2)}(\lambda) \times \cdots \times H_B^{(m)}(\lambda))$$
$$= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(H_B^{(1)}(\lambda), H_B^{(2)}(\lambda), \cdots, H_B^{(m)}(\lambda))$$
$$(2.83)$$

其中
$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(i)} \subseteq H_A^{(i)}(\lambda) \subseteq A_\lambda^{(i)}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$
$$B_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(i)} \subseteq H_B^{(i)}(\lambda) \subseteq B_\lambda^{(i)}\ (i = 1, 2, \cdots, m).$$

证明　(1) 由于 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(i)} \subseteq H_A^{(i)} \subseteq A_\lambda^{(i)}$，则

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(1)} \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(2)} \times \cdots \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(n)} \subseteq H_A^{(1)}(\lambda) \times H_A^{(2)}(\lambda) \times \cdots \times H_A^{(n)}(\lambda) \subseteq A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)}$$

由此

$$f(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(1)} \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(2)} \times \cdots \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(n)})$$
$$\subseteq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(H_A^{(1)}(\lambda) \times H_A^{(2)}(\lambda) \times \cdots \times H_A^{(n)}(\lambda))$$
$$= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(H_A^{(1)}(\lambda), H_A^{(2)}(\lambda), \cdots, H_A^{(n)}(\lambda))$$
$$\subseteq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_\lambda^{(1)} \times A_\lambda^{(2)} \times \cdots \times A_\lambda^{(n)})$$
$$= f(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)})$$

所以 $f(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(H_A^{(1)}(\lambda) \times H_A^{(2)}(\lambda) \times \cdots \times H_A^{(n)}(\lambda))$
$$= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} f(H_A^{(1)}(\lambda), H_A^{(2)}(\lambda), \cdots, H_A^{(n)}(\lambda)).$$

同理证明(2).

推论 2.6.4　设 $*$ 是 X 中的二元运算，$A, B \in F(X)$，则：

(1)
$$A * B = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_\lambda * B_\lambda) \quad (2.84)$$

(2)
$$A * B = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_{\underset{\cdot}{\lambda}} * B_{\underset{\cdot}{\lambda}}) \quad (2.85)$$

特别地，设 $\mathbf{R}$ 是实数域，$\mathbf{R}$ 中的运算集为 $\{+, -, \cdot, \div, \wedge, \vee\}$，则 $\forall A, B \in F(\mathbf{R})$

$$A + B = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_\lambda + B_\lambda) \quad (2.86)$$

$$A - B = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_\lambda - B_\lambda) \quad (2.87)$$

$$A \cdot B = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_\lambda \cdot B_\lambda) \quad (2.88)$$

$$A \div B = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_\lambda \div B_\lambda) \quad (2.89)$$

$$A \vee B = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_\lambda \vee B_\lambda) \quad (2.90)$$

$$A \wedge B = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_\lambda \wedge B_\lambda) \tag{2.91}$$

又由推论 2.6.3 中的式(2.77)得，$\forall z \in \mathbf{R}$

$$(A + B)(z) = \bigvee_{x+y=z} (A(x) \wedge B(y)) = \bigvee_{x \in R} (A(x) \wedge B(z - x)) \tag{2.92}$$

$$(A - B)(z) = \bigvee_{x-y=z} (A(x) \wedge B(y)) = \bigvee_{x \in R} (A(x) \wedge B(x - z)) \tag{2.93}$$

$$(A \cdot B)(z) = \bigvee_{x \cdot y=z} (A(x) \wedge B(y)) = \bigvee_{x \in R} \left(A(x) \wedge B\left(\frac{z}{x}\right)\right)(x \neq 0) \tag{2.94}$$

$$(A \div B)(z) = \bigvee_{x \div y=z} (A(x) \wedge B(y)) = \bigvee_{y \in R} (A(yz) \wedge B(y))(y \neq 0) \tag{2.95}$$

$$(A \vee B)(z) = \bigvee_{x \vee y=z} (A(x) \wedge B(y)) \tag{2.96}$$

$$(A \wedge B)(z) = \bigvee_{x \wedge y=z} (A(x) \wedge B(y)) \tag{2.97}$$

§2.7 模糊数及其运算

首先我们介绍区间数的概念.

定义 2.7.1 设 $\mathbf{R}$ 是实数域，称闭区间 $\bar{a} \triangleq [a_l, a_r]$ 为区间数，其中 $a_l, a_r \in \mathbf{R}$，$a_l \leqslant a_r$. $\mathbf{R}$ 上的区间数全体记为 $\overline{\mathbf{R}}$.

若 $a_l > 0$，称 $\bar{a}$ 为正区间数，若 $a_r < 0$，称 $\bar{a}$ 为负区间数.

在 $\overline{\mathbf{R}}$ 中定义序关系"$\leqslant$"，设 $\bar{a} = [a_l, a_r]$，$\bar{b} = [b_l, b_r]$，规定

$$\bar{a} \leqslant \bar{b} \Leftrightarrow a_l \leqslant b_l, \quad a_r \leqslant b_r$$

则$(\overline{\mathbf{R}}, \leqslant)$是偏序集.

设 $*$ 是实数 $\mathbf{R}$ 中的二元运算，则可以扩张为 $\overline{\mathbf{R}}$ 中的二元运算：$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \overline{\mathbf{R}}$

$$\bar{a} * \bar{b} = \{z \mid \exists (x,y) \in \bar{a} \times \bar{b}, x * y = z\} \tag{2.98}$$

若 $*$ 取实数中的运算集$\{+, -, \cdot, \div, \vee, \wedge\}$之一，则可以表示为

$$\bar{a} + \bar{b} = [a_l, a_r] + [b_l, b_r] = [a_l + b_l, a_r + b_r] \tag{2.99}$$

$$\bar{a} - \bar{b} = [a_l, a_r] - [b_l, b_r] = [a_l - b_r, a_r - b_l] \tag{2.100}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = [a_l, a_r] \cdot [b_l, b_r] \triangleq [c_l, c_r] \tag{2.101}$$

其中 $c_l = \min\{a_l b_l, a_l b_r, a_r b_l, a_r b_r\}$，$c_r = \max\{a_l b_l, a_l b_r, a_r b_l, a_r b_r\}$

$$\bar{a} \div \bar{b} = [a_l, a_r] \div [b_l, b_r] \triangleq [d_l, d_r] \tag{2.102}$$

其中

$$d_l = \min\left[\frac{a_l}{b_l}, \frac{a_l}{b_r}, \frac{a_r}{b_l}, \frac{a_r}{b_r}\right], d_r = \max\left[\frac{a_l}{b_l}, \frac{a_l}{b_r}, \frac{a_r}{b_l}, \frac{a_r}{b_r}\right]$$

$$\bar{a} \vee \bar{b} = [a_l, b_r] \vee [b_l, b_r] = [a_l \vee b_l, a_r \vee b_r] \tag{2.103}$$

$$\bar{a} \wedge \bar{b} = [a_l, a_r] \wedge [b_l, b_r] = [a_l \wedge b_l, a_r \wedge b_r] \tag{2.104}$$

特别地，对于正区间数 $\overline{\mathbf{R}}_+$ 中的乘法和除法为

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=[a_l,a_r]\cdot[b_l,b_r]=[a_lb_l,a_rb_r] \tag{2.105}$$

$$\bar{a}\div\bar{b}=[a_l,a_r]\div[b_l,b_r]=\left[\frac{a_l}{b_r},\frac{a_r}{b_l}\right] \tag{2.106}$$

容易证明($\overline{\mathbf{R}}$, ∨ , ∧)是一个分配格.

下面介绍区间数的数乘和倒数的概念.

设 $\bar{a}\in\overline{\mathbf{R}}$,$\lambda\in\mathbf{R}$,定义

$$\lambda\bar{a}=\lambda[a_l,a_r]=\begin{cases}[\lambda a_l,\lambda a_r], & \lambda>0\\ [0,0]\triangleq\bar{0}, & \lambda=0\\ [\lambda a_r,\lambda a_l], & \lambda<0\end{cases} \tag{2.107}$$

特别地,

$$-\bar{a}=-[a_l,a_r]=[-a_r,-a_l] \tag{2.108}$$

$$\bar{a}^{-1}=\frac{1}{\bar{a}}=\frac{1}{[a_l,a_r]}=[a_l^{-1}\wedge a_r^{-1},a_l^{-1}\vee a_r^{-1}] \tag{2.109}$$

容易验证区间数的数乘与其他运算之间有下列性质,$\forall\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\overline{\mathbf{R}},\beta,\alpha\in\mathbf{R}$:

(1) $-(-\bar{a})=\bar{a}$;

(2) $\bar{a}\leqslant\bar{b}\Leftrightarrow-\bar{b}\leqslant-\bar{a}$;

(3) $-(\bar{a}\vee\bar{b})=(-\bar{a})\wedge(-\bar{b})$,
$-(\bar{a}\wedge\bar{b})=(-\bar{a})\vee(-\bar{b})$;

(4) $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$;

(5) $\bar{a}\div\bar{b}=\bar{a}\cdot\bar{b}^{-1}$;

(6) $\bar{a}-\bar{o}=\bar{a},\bar{o}-\bar{a}=-\bar{a}$;

(7) $1\cdot\bar{a}=\bar{a},\overline{oa}=\bar{o}$;

(8) $\alpha(\beta\bar{a})=\beta(\alpha\bar{a})$;

(9) $\alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$;

(10) $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$;

(11) $(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{c})$;

(12) $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})\leqslant(\bar{a}\cdot\bar{b})+(\bar{a}\cdot\bar{c})$;

(13) $\bar{c}+(\bar{a}\vee\bar{b})=(\bar{c}+\bar{a})\vee(\bar{c}+\bar{b})$,
$\bar{c}+(\bar{a}\wedge\bar{b})=(\bar{c}+\bar{a})\wedge(\bar{c}+\bar{b})$;

(14) $\bar{c}-(\bar{a}\vee\bar{b})=(\bar{c}-\bar{a})\wedge(\bar{c}-\bar{b})$,
$\bar{c}-(\bar{a}\wedge\bar{b})=(\bar{c}-\bar{a})\vee(\bar{c}-\bar{b})$;

(15) $(\bar{a}\vee\bar{b})-\bar{c}=(\bar{a}-\bar{c})\vee(\bar{b}-\bar{c})$,
$(\bar{a}\wedge\bar{b})-\bar{c}=(\bar{a}-\bar{c})\wedge(\bar{b}-\bar{c})$;

(16) $(\bar{a}-\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+\bar{c}-\bar{b}=\bar{a}+(\bar{c}-\bar{b})$;

(17) $\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}=\bar{a}-(\bar{b}+\bar{c})$.

定义 2.7.2 设 $\mathbf{R}$ 是实数集,$A\subseteq\mathbf{R}$.

(1)若 A 满足:$\forall x_1,x_2\in A$,则 $\lambda x_2+(1-\lambda)x_1\in A(\lambda\in[0.1])$,则称 A 为 $\mathbf{R}$ 中的凸集.

(2)若 A 满足:序列 $\{x_n|n=1,2,\cdots\}\subseteq A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\in A$,则称 A 为 $\mathbf{R}$ 中的闭集.

(3)若 A 既是 $\mathbf{R}$ 中的闭集,又是 $\mathbf{R}$ 中的凸集,则称 A 为 $\mathbf{R}$ 中的闭凸集.

定理 2.7.1 设 $A\subseteq\mathbf{R}$ 且 A 有界,则 A 为 $\mathbf{R}$ 中的闭凸集的充分必要条件是 A 为区间数.

证明 必要性,设 A 是闭凸集,令 $a_l=\bigwedge\limits_{a\in A}a,a_r=\bigvee\limits_{a\in A}a$,现证明 $A=[a_l,a_r]$.

因为 $a_l=\bigwedge\limits_{a\in A}a$,则存在 $\{x_n\}\subseteq A,\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a_l$,故 $a_l\in A$. 同理 $a_r=\bigvee\limits_{a\in A}a\in A$.

$\forall x\in(a_l,a_r)$,因 $a_l<x$,则由确界性质知,$\exists x_1\in A$,使 $a_l<x_1<x$,同理 $x<a_r$,$\exists x_2\in A$,使 $x<x_2<a_r$,由此,$x_1<x<x_2$,由于 A 是凸集,取 $\lambda=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$,则

$$x=\lambda x_2+(1-\lambda)x_1\in A$$

故 $[a_l,a_r]\subseteq A$.

另一方面,$\forall x\in A,a_l=\bigwedge\limits_{a\in A}a\leqslant x\leqslant\bigvee\limits_{a\in A}a=a_r$ 即 $x\in[a_l,a_r]$,故 $A\subseteq[a_l,a_r]$,所以 $A=[a_l,a_r]$.

充分性,设 $A=[a_l,a_r]$,$\forall x_1,x_2\in A$,不妨设 $x_1<x_2$,则 $\forall\lambda\in[0,1]$.

$$a_l\leqslant x_1\leqslant\lambda x_2+(1-\lambda)x_1\leqslant x_2\leqslant a_r$$

故 $A=[a_l,a_r]$是凸集.

另一方面,若 $\{x_n|n=1,2,\cdots\}\subseteq[a_l,a_r]$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b\in[a_l,a_r]$,则 $A=[a_l,a_r]$ 是闭集.

所以 $A=[a_l,a_r]$是 $\mathbf{R}$ 中的闭凸集.

下面我们介绍模糊数的概念.

定义 2.7.3 设 $\mathbf{R}$ 是实数集,$A\in F(\mathbf{R})$,若任意的 $\lambda\in[0,1]$,A_λ 是凸集,则称 A 为 $\mathbf{R}$ 上的凸模糊集,简称凸 F 集.

定理 2.7.2 设 $A\in F(\mathbf{R})$,则 A 是凸模糊集的充分必要条件是任意的 $\mu\in[0,1]$,$x_1,x_2\in\mathbf{R}$,有

$$A(\mu x_2+(1-\mu)x_1)\geqslant A(x_1)\wedge A(x_2)\tag{2.109}$$

证明 必要性,设 A 是凸 F 集.

令 $\lambda=A(x_1)\wedge A(x_2)$,则 $A(x_1)\geqslant\lambda,A(x_2)\geqslant\lambda$,故 $x_1\in A_\lambda,x_2\in A_\lambda$,因 A_λ 是凸集,从而 $\mu x_2+(1-\mu)x_1\in A_\lambda$,所以 $A(\mu x_2+(1-\mu)x_1)\geqslant\lambda$,即

$$A(\mu x_2+(1-\mu)x_1)\geqslant A(x_1)\wedge A(x_2).$$

充分性,设 $A(\mu x_2+(1-\mu)x_1)\geqslant A(x_1)\wedge A(x_2)$.

$\forall x_1,x_2\in A_\lambda$,则 $A(x_1)\geqslant\lambda,A(x_2)\geqslant\lambda$,故 $A(x_1)\wedge A(x_2)\geqslant\lambda$,于是

$$A(\mu x_2+(1-\mu)x_1)\geqslant\lambda$$

从而 $\mu x_2+(1-\mu)x_1\in A_\lambda$,即 A_λ 是凸集,所以 A 是凸模糊集.

推论 2.7.1　设 $A \in F(\mathbf{R})$,则 A 是凸模糊集的充分必要条件是任意的 $x_1,x_2,x_3 \in \mathbf{R}$,若 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$,则 $A(x_2) \geqslant A(x_1) \wedge A(x_3)$.

定义 2.7.4　设 $\mathbf{R}$ 是实数集,$A \in F(\mathbf{R})$.

(1)若任意的 $\lambda \in [0,1]$,A_λ 是闭集,则称 A 是 $\mathbf{R}$ 上的闭模糊集,简称为闭 F 集;

(2)若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$,使 $A(x_0)=1$,则称 A 是 $\mathbf{R}$ 上的正则模糊集,简称为正则 F 集.

定义 2.7.5　实数集 $\mathbf{R}$ 上的正则的、闭的凸模糊集称为 $\mathbf{R}$ 上的一个模糊数,简称 F 数. $\mathbf{R}$ 上的 F 数全体记为 $\tilde{\mathbf{R}}$.

定义 2.7.6　设 A 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的模糊数.

(1)若 $\mathrm{Supp}A = A_0 = \{x \mid A(x) > 0\}$ 有界,则称 A 为有限模糊数,简称有限 F 数;

(2)若任意的 $x \in \mathrm{Supp}A$,有 $x>0$,则称 A 为正模糊数,简称正 F 数;

(3)若任意的 $x \in \mathrm{Supp}A$,有 $x<0$,则称 A 为负模糊数,简称负 F 数.

定理 2.7.3　设 $A \in F(\mathbf{R})$,则 A 是 $\mathbf{R}$ 上的模糊数的充分必要条件是:

(1)存在 $a_{l_1}, a_{r_1} \in \mathbf{R}(a_{l_1} \leqslant a_{r_1})$,使得 $\mathrm{Ker}A = [a_{l_1}, a_{r_1}] \neq \varnothing$,当 $x < a_{l_1}$ 时,$A(x)$ 单调不减右连续;当 $x > a_{r_1}$ 时,$A(x)$ 单调不增左连续.

(2) $\lim\limits_{n \to -\infty} A(x) = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} A(x) = 0$.

证明　充分性,因为 $\mathrm{Ker}A = [a_{l_1}, a_{r_1}] \neq \varnothing$,所以 A 是正则 F 集. 要证 A 是闭凸 F 集,只须证 $\forall \lambda \in [0,1]$,$A_\lambda$ 是闭凸集,即 A_λ 是闭区间.

令 $a_{l_\lambda} = \wedge\{x \mid x \in A_\lambda\}$,$a_{r_\lambda} = \vee\{x \mid x \in A_\lambda\}$,现证 $A_\lambda = [a_{l_\lambda}, a_{r_\lambda}]$.

$\forall x \in A_\lambda$,$a_{l_\lambda} \leqslant x \leqslant a_{r_\lambda}$,即 $x \in [a_{l_\lambda}, a_{r_\lambda}]$,故

$$A_\lambda \subseteq [a_{l_\lambda}, a_{r_\lambda}].$$

若 $x \notin A_\lambda$,由 $A(x)$ 的单调性知,$x \leqslant a_{l_\lambda}$ 或 $x \geqslant a_{r_\lambda}$,即 $x \notin (a_{l_\lambda}, a_{r_\lambda})$,故 $(a_{l_\lambda}, a_{r_\lambda}) \subseteq A_\lambda$.

再证 $a_{l_\lambda}, a_{r_\lambda} \in A_\lambda$. 事实上,若 $x \in (a_{l_\lambda}, a_{r_\lambda}) \subseteq A_\lambda$,则 $A(x) \geqslant \lambda$,由 $A(x)$ 的右连续性,$A(a_{l_\lambda}) = \lim\limits_{n \to a_{l_\lambda}^+} A(x) \geqslant \lambda$,故 $a_{l_\lambda} \in A_\lambda$,同理证 $a_{r_\lambda} \in A_\lambda$,所以 $A_\lambda = [a_{l_\lambda}, a_{r_\lambda}]$,即 A_λ 是闭凸集,由此 A 是 F 数.

必要性,(1)设 A 是 F 数,则 F 正则,故 $\mathrm{Ker}A = A_1 = [a_{l_1}, a_{r_1}] \neq \varnothing$.

设 $x < y < a_{l_1}$,假若 $A(x) > A(y)$,$\exists \lambda \in [0,1]$,使 $A(x) > \lambda > A(y)$,于是 $x \in A_\lambda \triangleq [a_{l_\lambda}, a_{r_\lambda}]$,则 $x > a_{l_\lambda}$,而 $y \notin A_\lambda = [a_{l_\lambda}, a_{r_\lambda}]$,$y < a_{l_\lambda} < x$,这与 $x<y$ 矛盾,故 $A(x) \leqslant A(y)$,即 $A(x)$ 当 $x \leqslant a_l$ 时,是单调不减的.

设 $x < a_{l_1}$,假若 $A(x)$ 不是右连续,即 $\lim\limits_{y \to x^+} A(y) = A(x+0) \neq A(x)$,由 $A(x)$ 的单调不减性知,$A(x) < A(x+0)$,于是 $\exists \lambda \in [0,1]$,使得 $A(x) < \lambda < A(x+0)$,则 $x \notin A_\lambda = [a_{l_\lambda}, a_{r_\lambda}]$,且 $x < a_{l_\lambda}$,则 $\exists \varepsilon > 0$,使 $x + \varepsilon < a_{l_\lambda}$,由 $A(x)$ 的单调不减性知,$A(x+\varepsilon) > A(x+0) > \lambda$,于是 $x + \varepsilon \in A_\lambda = [a_{l_\lambda}, a_{r_\lambda}]$,即 $x + \varepsilon > a_{l_\lambda}$,令 $\varepsilon \to 0$,则 $x \geqslant a_{l_\lambda}$,

这与 $x < a_{l_\lambda}$ 矛盾，所以 $A(x)$ 是右连续，由此，当 $x < a_{l_1}$ 时，$A(x)$ 是单调不减右连续.

同理证明，当 $x > a_{r_1}$ 时，$A(x)$ 是单调不增左连续.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} A(x) = \mu > 0$，则当 $\lambda \in (0,\mu)$ 时，A_λ 不是闭区间，与已知条件矛盾，所以 $\lim\limits_{x\to-\infty} A(x) = 0$，同理证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = 0$.

定理 2.7.4 设 $H:[0,1]\to\overline{\mathbf{R}}, \lambda\to H(\lambda) = [a_l, a_r] \neq \varnothing$，且 $\lambda \leqslant \mu \Rightarrow [a_{l_\mu}, a_{r_\mu}] \subseteq [a_{l_\lambda}, a_{l_\lambda}]$，$H$ 称为区间数套，则：

(1) $A = \bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda) \in \tilde{\mathbf{R}}$；

(2) $A_\lambda = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H(\alpha), A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H(\alpha)$.

证明 由于 H 也是集合套，则 $A \in F(\mathbf{R})$.

又由于 $H(1) = [a_{l_1}, a_{r_1}] \neq \varnothing$，则 A 正则.

由 F 集的表现定理知，$A_\lambda = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H(\alpha), A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H(\alpha)$，由于 $H(\alpha)$ 是区间数，则 $A_\lambda = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$ 也是区间数，即 $\forall_\lambda \in [0,1]$，$A_\lambda$ 是闭凸集，故 A 是闭凸 F 集，所以 A 是 $\mathbf{R}$ 上的模糊数，即 $A \in \tilde{\mathbf{R}}$.

定理 2.7.5 设 $A, B \in \tilde{\mathbf{R}}$，$* \in \{+, -, \cdot, \div, \vee, \wedge\}$，则：

(1) $A * B \in \tilde{\mathbf{R}}$；

(2) $(A * B)_\lambda = A_\lambda * B_\lambda, (A * B)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} * B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

证明 由推论 2.6.4 知，$A * B = \bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]} \lambda(A_\lambda * B_\lambda)$，$A * B = \bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]} \lambda(A_{\underset{\cdot}{\lambda}} * B_{\underset{\cdot}{\lambda}})$，故

$$(A * B)_\lambda = A_\lambda * B_\lambda, \quad (A * B)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} * B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

由于 $\forall \lambda \in [0,1]$，$A_\lambda * B_\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$. 所以 $A * B \in \tilde{\mathbf{R}}$.

由式(2.92)～式(2.97)六个式子，我们得模糊数的六种运算.

定义 2.7.7 设 $A, B \in \tilde{\mathbf{R}}$，$\forall Z \in \mathbf{R}$，则分别称：

(1) $$(A+B)(z) = \bigvee_{x+y=z} (A(x) \wedge B(y)) = \bigvee_{x\in R} (A(x) \wedge B(z-x)) \quad (2.111)$$

(2) $$(A-B)(z) = \bigvee_{x-y=z} (A(x) \wedge B(y)) = \bigvee_{x\in R} (A(x) \wedge B(x-z)) \quad (2.112)$$

(3) $$(A\cdot B)(z) = \bigvee_{x\cdot y=z} (A(x) \wedge B(y)) = \bigvee_{x\in R} \left(A(x) \wedge B\left(\frac{z}{x}\right)\right) (x\neq 0) \quad (2.113)$$

(4) $$(A\div B)(z) = \bigvee_{x\div y=z} (A(x) \wedge B(y)) = \bigvee_{y\in R} (A(yz) \wedge A(y)) (y\neq 0) \quad (2.114)$$

(5) $$(A\vee B)(z) = \bigvee_{x\vee y=z} (A(x) \wedge B(y)) \quad (2.115)$$

(6) $$(A\wedge B)(z) = \bigvee_{x\wedge y=z} (A(x) \wedge B(y)) \quad (2.116)$$

为 A 和 B 的和、差、积、商以及上确界、下确界.

在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 中定义序关系，$\forall A, B \in \tilde{\mathbf{R}}$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall \lambda \in [0,1] \quad A_\lambda \subseteq B_\lambda$$

由于($\overline{\mathbf{R}}$, ∨ , ∧)是分配格,所以($\tilde{\mathbf{R}}$, ∨ , ∧)也是分配格.

定理 2.7.6　设 $A,B\in\tilde{\mathbf{R}}$,若 $\forall\alpha\in\mathbf{R},\alpha\neq 0$,记 $(\alpha A)(x)=A\left(\frac{x}{\alpha}\right)$,特别地,$(-A)(x)=A(-x)$(如图 2.8).

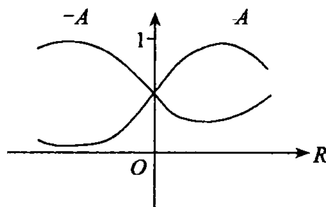


图 2.8

(1) $-(-A)=A$;

(2) $(\alpha A)_\lambda=\alpha A_\lambda$,(特别地,$(-A)_\lambda=-A_\lambda$);

(3) $A\subseteq B\Leftrightarrow -B\subseteq -A$;

(4) $-(A\cup B)=(-A)\cap(-B)$,
　　$-(A\cap B)=(-A)\cup(-B)$;

(5) $A-B=A+(-B)$;

(6) $A-O=A,O-A=-A$,其中 O 表示 $\forall\lambda\in[0,1]\quad O_\lambda=O$;

(7) $1A=A,0A=0$;

(8) $\alpha(\beta A)=\beta(\alpha A)\ (\alpha,\beta\in\mathbf{R})$;

(9) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B\ (\alpha\in\mathbf{R})$;

(10) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

(11) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$;

(12) $A\cdot(B+C)\subseteq A\cdot B+A\cdot C$;

(13) $A+(B\vee C)=(A+B)\vee(A+C)$,
　　$A+(B\wedge C)=(A+B)\wedge(A+C)$;

(14) $A-(B\vee C)=(A-B)\wedge(A-C)$,
　　$A-(B\wedge C)=(A-B)\vee(A-C)$;

(15) $(A\vee B)-C=(A-C)\vee(B-C)$,
　　$(A\wedge B)-C=(A-C)\wedge(B-C)$;

(16) $(A-B)+C=A+C-B=A+(C-B)$;

(17) $A-B-C=A-(B+C)$.

证明　只证(2),(4),(12),(13).

(2)设 $A_\lambda=[a_l,a_r]$,则

$$x\in(\alpha A)_\lambda\Leftrightarrow(\alpha A)(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow A\left(\frac{x}{\alpha}\right)\geqslant\lambda\Leftrightarrow\frac{x}{\alpha}\in A_\lambda=[a_l,a_r]\Leftrightarrow x\in\alpha[a_l,a_r]=\alpha A_\lambda$$

所以$(\alpha A)_\lambda=\alpha A_\lambda$,特别地,有$(-A)_\alpha=-A_\alpha$.

(4)因为$(-(A\cup B))_\lambda=-(A\cup B)_\lambda=-(A_\lambda\cup B_\lambda)=-A_\lambda\cap -B_\lambda$

$$=(-A)_\lambda\cap(-B)_\lambda=(-A\cap -B)_\lambda.$$

所以$-(A\cup B)=-A\cap -B$.

同理$-(A\cap B)=-A\cup -B$.

(12)$(A\cdot(B+C))_\lambda=A_\lambda\cdot(B+C)_\lambda=A_\lambda\cdot(B_\lambda+C_\lambda)\subseteq A_\lambda\cdot B_\lambda+A_\lambda\cdot C_\lambda$

$$=(A\cdot B)_\lambda+(A\cdot C)_\lambda=(A\cdot B+A\cdot C)_\lambda$$

所以$A\cdot(B+C)\subseteq A\cdot B+A\cdot C$.

(13)$(A+(B\vee C))_\lambda=A_\lambda+(B\vee C)_\lambda=A_\lambda+(B_\lambda\vee C_\lambda)$

$$=(A_\lambda+B_\lambda)\vee(A_\lambda+C_\lambda)=(A+B)_\lambda\vee(A+C)_\lambda$$

$$=((A+B)\vee(A+C))_\lambda$$

所以$A+(B\vee C)=(A+B)\vee(A+C)$.

同理$A+(B\wedge C)=(A+B)\wedge(A+C)$.

§2.8 随机集与集值统计

数理统计是概率论在统计学中的应用,随机集理论应用于统计学中就产生了集值统计. 首先我们回顾一下可测空间和可测函数的概念.

定义 2.8.1 设X是非空集合,$\mathscr{A}\subseteq P(X)$,若$\mathscr{A}$满足:

(1)$X\in\mathscr{A}$;

(2)$A\in\mathscr{A}$,则$A'\in\mathscr{A}$;

(3)$\{A_n|n\in N\}\subseteq\mathscr{A}$,则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$.

则称$\mathscr{A}$为X上的一个Σ代数或称Σ域;$(X,\mathscr{A})$称为一个可测空间,若$A\in\mathscr{A}$,A称为X的一个可测子集.

由对偶律不难证明一个Σ代数对可数交也封闭,即$\{A_n|n\in N\}\subseteq\mathscr{A}$,则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}.$$

设$(\Omega,\mathscr{F})$是一个可测空间,$\mathscr{F}$是Ω上的一个Σ代数. $(X,\mathscr{A})$也是一个可测空间,给定映射$\zeta:\Omega\to X$,如果ζ满足:$\forall A\in\mathscr{A}$,有

$$\zeta^{-1}(A)=\{\omega\in\Omega|\zeta(\omega)\in A\}\in\mathscr{F}\tag{2.117}$$

则称ζ是$\mathscr{F}-\mathscr{A}$可测映射,也称为X上的随机映射;当$X=\mathbf{R}$时,ζ称为随机变量;当$X=\mathbf{R}^n$时,ζ称为随机向量.

设X是非空集合,$\mathscr{D}\subseteq P(X)$,记

$$P(\mathscr{D})=\{\mathscr{A}|\mathscr{A}\subseteq\mathscr{D}\}$$

若$\mathscr{A}\in P(\mathscr{D})$,$\{\mathscr{A}_n|n\in\mathbf{N}\}\subseteq P(\mathscr{D})$,记

(1) $$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}_n=\{A|\exists n\in\mathbf{N},A\in\mathscr{A}_n\}\tag{2.118}$$

(2) $$\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}_n=\{A\mid \forall n\in\mathbf{N},A\in\mathscr{A}_n\}\tag{2.119}$$

(3) $$\mathscr{A}'=\{A\in P(\mathscr{D})\mid A\notin\mathscr{A}\}\tag{2.120}$$

分别称为 $\{\mathscr{A}_n\mid n\in\mathbf{N}\}$ 的并、交及 $\mathscr{A}$ 的余.

定义 2.8.2　设 $(X,\mathscr{D})$ 是可测空间，$\tilde{\mathscr{D}}\subseteq P(\mathscr{D})$ 关于运算式(2.118)，式(2.119) 和式(2.120) 构成一个 Σ 代数，则称 $\tilde{\mathscr{D}}$ 是 X 上的超 Σ 代数，或称超 Σ 域，$(X,\mathscr{D},\tilde{\mathscr{D}})$ 称为超可测空间.

显然，$(X,\mathscr{D},P(\mathscr{D}))$ 是超可测空间.

定义 2.8.3　设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是可测空间，$(X,\mathscr{D},\tilde{\mathscr{D}})$ 是超可测空间，若集值映射 ζ: $\Omega\to\tilde{\mathscr{D}}$ 满足：$\forall\mathscr{A}\in\tilde{\mathscr{D}}$

$$\zeta^{-1}(\mathscr{A})=\{\omega\in\Omega\mid \varepsilon(\omega)\in\mathscr{A}\}\in\mathscr{F}\tag{2.121}$$

则称 ζ 是 $\mathscr{F}-\tilde{\mathscr{D}}$ 可测映射，也称 ζ 是 X 上的随机集.

设 X 是集合，$\forall x\in X$，记

$$\dot{x}=\{A\mid A\in P(X),x\in A\}\tag{2.122}$$

$$\dot{X}=\{\dot{x}\mid x\in X\}\tag{2.123}$$

因为 $(X,P(X),P(P(X)))$ 是超可测空间，记

$$\Sigma(\dot{X})=\cap\{\tilde{\mathscr{D}}\mid \dot{X}\subseteq\tilde{\mathscr{D}},\tilde{\mathscr{D}}\text{是 }X\text{ 上的超 }\Sigma\text{ 域}\}\tag{2.124}$$

称 $\Sigma(\dot{X})$ 为由 $\dot{X}$ 生成的超 Σ 域，并称 $(X,P(X),\Sigma(\dot{X}))$ 为 $\dot{X}$ 生成的超可测空间.

定义 2.8.4　设 ζ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到超可测空间 $(X,P(X),\tilde{\mathscr{D}})$ 的随机集，$\forall\mathscr{A}\in\tilde{\mathscr{D}}$，令

$$\mu_\zeta(\mathscr{A})\triangleq P(\zeta^{-1}(\mathscr{A}))\tag{2.125}$$

则称 $\mu_\zeta(\mathscr{A})$ 为 ζ 在 $(X,P(X),\tilde{\mathscr{D}})$ 上的诱导分布.

设 $x\in X,\dot{x}\in\tilde{\mathscr{D}}$，若 $\zeta^{-1}(\dot{x})=\{\omega\in\Omega\mid x\in\zeta(\omega)\}\in\mathscr{F}$，则称

$$\mu_\zeta(x)=P(\zeta^{-1}(\dot{x}))\tag{2.126}$$

为 ζ 在 x 处的落影，并称 ζ 是 X 上的可落随机集.

定理 2.8.1　设 ζ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到超可测空间 $(X,P(X),\tilde{\mathscr{D}})$ 的随机集，$\forall x\in X$，令

$$A(x)=\mu_\zeta(x)=P(\zeta^{-1}(\dot{x}))\tag{2.127}$$

则 A 是 X 上的一个模糊集，且 ζ 在 x 处的落影是 A 的隶属度 $A(x)$.

因为 $\forall x\in X,A(x)\in[0,1]$ 所以定理的证明是显然的.

定义 2.8.5 设 ζ,η 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到超可测空间 $(X,P(X),\tilde{\mathscr{D}}_1)$ 和 $(Y,P(Y),\tilde{\mathscr{D}}_2)$ 的两个随机集，$\forall x\in X,y\in Y$.

(1)称

$$\mu_{(\zeta,y)}(x,y)=P\{\omega\in\Omega\mid x\in\zeta(\omega),y\in\eta(\omega)\} \tag{2.128}$$

为 ζ 与 η 的联合落影；

(2)若 $\mu_\zeta(x)>0,\forall y\in Y$,则称

$$\mu_{\eta|\zeta}(y\mid x)=P\{y\in\eta(\omega)\mid x\in\zeta(\omega)\} \tag{2.129}$$

为 η 在 ζ 覆盖 x 下的条件落影；

(3)若 $\forall x\in X,y\in Y$,有

$$\mu_{(\zeta,\eta)}(x,y)=\mu_\zeta(x)\mu_\eta(y) \tag{2.130}$$

则称 ζ 和 η 是相互独立的随机集.

定理 2.8.2 设 ζ,η 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到超可测空间 $(X,P(X),\tilde{\mathscr{D}}_1)$ 和 $(Y,P(Y),\tilde{\mathscr{D}}_2)$ 的两个随机集，若 $\forall x\in X,y\in Y,\mu_\zeta(x)>0$,则

$$\mu_{(\zeta,\eta)}(x,y)=\mu_\zeta(x)\mu_{\eta|\zeta}(y\mid x) \tag{2.131}$$

证明 $\mu_{(\zeta,\eta)}(x,y)=P\{\omega\in\Omega\mid x\in\zeta(\omega),y\in\eta(\omega)\}$ 若令 $A\triangleq\{\omega\in\Omega\mid x\in\zeta(\omega)\}$, $B\triangleq\{\omega\in\Omega\mid y\in\eta(\omega)\}$, 因 $P(A)=\mu_\zeta(x)>0$, 则由条件概率的定义, $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$. 由此

$$\begin{aligned}\mu_{(\zeta,\eta)}(x,y)&=P\{\omega\in\Omega\mid x\in\zeta(\omega),y\in\eta(\omega)\}\\&=P(AB)=P(A)P(B\mid A)\\&=P\{\omega\in\Omega\mid x\in\zeta(\omega)\}P\{y\in\eta(\omega)\mid x\in\zeta(\omega)\}\\&=\mu_\zeta(x)\cdot\mu_{\eta|\zeta}(y\mid x)\end{aligned}$$

下面介绍集值统计的思想.

设 ζ 是 Ω 到 $P(X)$ 的随机集，以 ζ 为母体，进行 n 次独立抽样试验，得到容量为 n 的简单随机样本 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$，每个 $\zeta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和 ζ 同分布，并且相互独立，即

$$\mu(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\mu_{\zeta_1}(x_1)\mu_{\zeta_2}(x_2)\cdots\mu_{\zeta_n}(x_n)$$

其中 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X^n$.

由于每个 $\zeta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 X 中的一个集合，$\forall x\in X$，我们考虑 $\zeta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 对 x 的覆盖频率问题. 若 $\zeta_i(x)$ 表示 x 关于集合 ζ_i 的特征值，则样本 $\{\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n\}$ 对 x 的覆盖频率为

$$\bar{\zeta}_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\zeta_i(x) \tag{2.132}$$

我们把 $\bar{\zeta}_n(x)$ 作为 ζ 在 x 处的落影 $\mu_\zeta(x)$ 的估计值，即模糊集 A 的隶属度 $A(x)$ 的估计值，而 $\bar{\zeta}_n$ 作为 μ_ζ 的估计函数，即模糊集 A 的隶属函数的估计函数.

定理 2.8.3(落影大数定理)　设 $\zeta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 Ω 到 $P(X)$ 的 n 个独立同分布的随机集，$\mu(x)$ 表示分布的落影，$\forall x\in X,\omega\in\Omega$

$$\bar{\zeta}_n(\omega,x)\to\mu(x)\qquad(a,e)\tag{2.133}$$

其中
$$\bar{\zeta}_n(\omega,x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\zeta_i(\omega)(x).$$

证明　由 $\zeta_i(\omega)$ 是一组独立同分布的随机集，且有数学期望

$$E(\zeta_i)=\int_{\Omega}\zeta_i(\omega)(x)P(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_{\{x\in\zeta_i\}}P(\omega)\mathrm{d}\omega=P\{\omega\mid x\in\zeta_i(\omega)\}=\mu(x)$$

故由大数定律，$\bar{\zeta}_n(\omega,x)\to\mu(x)(a,e)$.

定理 2.8.3 告诉我们，n 个样本集合 $\{\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n\}$ 对 x 的覆盖频率，当 n 趋于无穷大时，以 $\mu(x)$ 为极限，所以当 n 充分大时，可以用式(2.132)中的 $\bar{\zeta}_n(x)$ 作为 $\mu(x)$ 的估计值，即作为模糊集 A 的隶属度 $A(x)$ 的估计值.

集值统计的具体方法如下：

确定论域 X，取定 X 中的一个点 x，已知 X 上的一个模糊概念 A，给定 X 上与概念 A 相联系的普通集合 A^*，与概念 A 相关联的条件 S 制约着 A^* 的变动. 由于条件 S 对 A^* 没有限制死，A^* 可以覆盖 x，也可以不覆盖 x，A^* 覆盖 x 的次数与试验的总次数之比，称为 x 对于 A 的隶属频率，即

$$x\text{ 对 }A\text{ 的隶属频率}=\frac{x\in A^*\text{ 次数}}{\text{试验次数}}$$

随着试验次数 n 的增加，隶属频率呈现稳定性，频率稳定的那个数称为 x 对于 A 的隶属度.

§2.9　集合套的落影

设 $H(X)$ 是 X 上的集合套全体，$H\in H(X)$，如果记 $I=[0,1]$，则 $H:I\to P(X)$，$\forall x\in X$，记

$$\dot{x}=\{H(\alpha)\mid\alpha\in I,x\in H(\alpha)\}\tag{2.134}$$

引理 2.9.1　设 $H\in H(X)$，$\forall x\in X$，则 $\exists\lambda\in I$，使

$$H^{-1}(\dot{x})=\begin{cases}[0,\lambda), & x\notin H(\lambda)\\ [0,\lambda], & x\in H(\lambda)\end{cases}$$

其中 $H^{-1}(\dot{x})=\{\alpha\in I\mid x\in H(\alpha)\}$.

证明　若 $\dot{x}=\varnothing$，即 $\forall\alpha\in I,x\notin H(\alpha)$，则 $H^{-1}(\dot{x})=\varnothing$. 此时不妨设 $\lambda=0$，则

$$H^{-1}(\dot{x})=\varnothing=[0,\lambda).$$

若 $\dot{x} \neq \varnothing$,令 $\lambda = \vee\{\alpha \mid \alpha \in I, x \in H(\alpha)\}$,由于 H 是逆序集值映射,易证:

当 $x \notin H(\lambda)$ 时,$H^{-1}(\dot{x}) = [0,\lambda)$;当 $x \in H(\lambda)$ 时,$H^{-1}(\dot{x}) = [0,\lambda]$.

设 $H \in H(X)$,$\forall x \in X$,记

$$H(I) \triangleq \mathscr{A} = \{H(\alpha) \mid \alpha \in I\} \subseteq P(X)$$

$$\dot{x} = \{A \mid x \in A \in \mathscr{A}\}$$

$$\tilde{\mathscr{A}} = \{\dot{x} \mid x \in X\} \subseteq P(P(X))$$

$$\Sigma(\tilde{\mathscr{A}}) \triangleq \cap\{\tilde{\mathscr{D}} \mid \tilde{\mathscr{A}} \subseteq \tilde{\mathscr{D}}, \tilde{\mathscr{D}} \text{ 是 } X \text{ 上的超 } \Sigma \text{ 域}\}$$

即 $\Sigma(\tilde{\mathscr{A}})$ 是由 $\tilde{\mathscr{A}}$ 生成的超 Σ 域.

定理 2.9.1 设 $H \in H(X)$,$(I, \mathscr{B}_0, P)$ 是概率空间,则 H 是 X 上的可落随机集. 其中 $\mathscr{B}_0$ 是 I 上的 Borel 域.

证明 由引理 2.9.1 知 $H^{-1}(\dot{x}) = \begin{cases} [0,\lambda), & x \notin H(\lambda) \\ [0,\lambda], & x \in H(\lambda) \end{cases}$

而 $H^{-1}(\Sigma(\tilde{\mathscr{A}})) = \Sigma(H^{-1}(\tilde{\mathscr{A}})) = \Sigma(\{H^{-1}(\dot{x}) \mid x \in X\}) \subseteq \mathscr{B}_0$,所以 H 是 X 上的可落随机集.

因为 $\forall x \in X$,令 $A(x) \triangleq \mu_H(x) = P(H^{-1}(\dot{x}))$,则 A 是 X 到 I 的映射,所以 A 是 X 上的一个模糊集,由此证得定理.

定理 2.9.2 集合 X 上的集合套的落影是 X 上的一个模糊集.

例 2.9.1 设 X 是集合,$B \subseteq A \subseteq X$,故 $\lambda \in I$,令 $H \in H(X)$ 为,$\forall \alpha \in I$,当 $\alpha < \lambda$ 时,$H(\alpha) = A$,当 $\alpha \geqslant \lambda$ 时,$H(\alpha) = B$,则:

当 $x \in B$ 时,$H^{-1}(\dot{x}) = I$,则 $\mu_H(x) = P(I) = 1$.

当 $x \in A - B$ 时,$H^{-1}(\dot{x}) = [0,\lambda)$,则 $\mu_H(x) = P([0,\lambda)) \triangleq P_\lambda$.

当 $x \notin A$ 时,$H^{-1}(\dot{x}) = \varnothing$,则 $\mu_H(x) = P(\varnothing) = 0$.

所以,H 在 X 上的落影模糊集 A 为

$$A(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ P_\lambda, & x \in A - B \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

特别地,当 $A = B$ 时,$A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$,即 A 是普通集.

例 2.9.2 设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,$A_i = \{x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n\}$ $(i = 1,2,\cdots,n)$,令 $H \in H(X)$ 为 $H(0) = X = A_1$,$\dfrac{i-1}{n} < \alpha \leqslant \dfrac{i}{n}$ 时,$H(\alpha) = A_i$,则

$$\dot{x}_i = \{A_1, A_2, \cdots, A_i\} \ (i = 1,2,\cdots,n)$$

所以 H 在 X 上的落影模糊集 A 为，$\forall x \in X$

$$A(x_i) \triangleq \mu_H(x_i) = P(H^{-1}(\dot{x}_i)) = P\left(\left[0, \frac{i}{n}\right]\right) \triangleq P_i$$

即 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i / x_i$.

下面讨论集合套等价类的落影.

引理 2.9.2　设 $H_1, H_2 \in H(X)$，且 $H_1 \sim H_2$，则

$$\vee \{\alpha \in I \mid x \in H_1(\alpha)\} = \vee \{\alpha \in I \mid x \in H_2(\alpha)\}.$$

证明　记 $\lambda = \vee \{\alpha \in I \mid x \in H_1(\alpha)\}$，则 $\forall \beta < \lambda, x \in H_1(\beta)$，故 $x \in \bigcap\limits_{\beta<\lambda} H_1(\beta) = \bigcap\limits_{\beta<\lambda} H_2(\beta)$，即 $\forall \beta < \lambda, x \in H_2(\beta)$，所以

$$\lambda = \vee \{\alpha \in I \mid x \in H_1(\alpha)\} \leqslant \vee \{\alpha \in I \mid x \in H_2(\alpha)\}$$

若 $\beta > \lambda, x \in H_2(\beta)$，则 $\forall \alpha < \beta, x \in H_2(\alpha)$，由此 $x \in \bigcap\limits_{\alpha<\beta} H_2(\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} H_1(\alpha)$，取 α_0，使 $\lambda < \alpha_0 < \beta$，则 $x \in H_1(\alpha_0)$，且 $\lambda = \vee \{\alpha \in I \mid x \in H_1(\alpha)\}$ 矛盾，所以 $\beta > \lambda$ 时，$x \notin H_2(\mathscr{B})$，由此 $\vee \{\alpha \in I \mid x \in H_2(\alpha)\} = \lambda$，即

$$\vee \{\alpha \in I \mid x \in H_1(\alpha)\} = \vee \{\alpha \in I \mid x \in H_2(\alpha)\}.$$

推论 2.9.1　设概率空间 $(I, \mathscr{B}_0, P)$ 满足：$\forall \lambda \in I, P(\zeta = \lambda) = 0$，则集合套等价类关于概率 P 的落影是 X 上的同一个模糊集.

设 $A \in F(X)$，$\forall \lambda \in I$，令 $H_A(\lambda) = A_\lambda$，则 H_A 是 X 上的集合套，由于 $\forall x \in X$，$\exists t \in I$

$$H_A^{-1}(\dot{x}) = \begin{cases} [0, t), & x \notin H_A(t) \\ [0, t], & x \in H_A(t) \end{cases}$$

如果概率空间 $(I, \mathscr{B}_0, P)$ 的概率 P 是均匀分布概率，则 H_A 的落影模糊集

$$\tilde{A}(x) = P(H_A^{-1}(\dot{x})) = t \tag{2.135}$$

又由模糊集的分解定理

$$A(x) = \bigvee_{\lambda \in I} \lambda \wedge A_\lambda(x) = \vee \{\lambda \in I \mid x \in A_\lambda = H_A(\lambda)\} = t \tag{2.136}$$

所以

$$A(x) = \tilde{A}(x)$$

由此得定理.

定理 2.9.3　设 $A \in F(X)$，则存在 I 到 $P(X)$ 的集值映射 H_A，且存在 $(I, \mathscr{B}_0)$ 上的概率 P 使得 H_A 在 X 上的落影是模糊集 A.

如果概率空间 $(I, \mathscr{B}_0, P)$ 满足：$P([0, t)) = P([0, t])$，记

$$F(t) \triangleq P([0, t)) \tag{2.137}$$

则 $\forall x \in X$

$$A(x) = P(H^{-1}(\dot{x})) = P([0, t)) = F(t) \tag{2.138}$$

所以我们可以用 I 上的经验分布函数 F 来表示模糊集 A 的隶属函数 A.

例 2.9.3 设非空集合 $X,\{H_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \subseteq P(X)$，且满足 $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots \supseteq H_n \neq \varnothing$，取 $t_i \in I$ 使得 $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n$. 我们作 n 次独立同分布的集值试验，使得

$$H(t_i) = H_i(i = 1, 2, \cdots, n)$$

如图 2.9、图 2.10 所示，由此，我们得到经验分布函数

$$F_n^*(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ \dfrac{1}{n}, & t_i \leqslant t < t_{i+1}(i = 1, 2, \cdots, n-1) \\ 1, & t \geqslant t_n \end{cases}$$

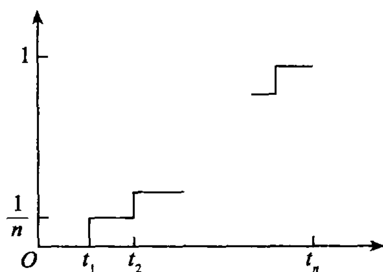


图 2.9

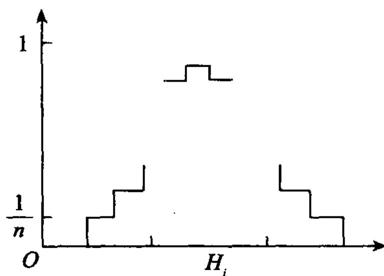


图 2.10

由 W. Glivenko 定理

$$A(x) = F(t) \approx F_n^*(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ \dfrac{1}{n}, & t_i \leqslant t < t_{i+1} \\ 1, & t \geqslant t_n \end{cases}$$

其中
$$t = \vee \{t_i \mid x \in H(t_i)\}.$$

最后我们用集合套来解释集值统计.

设 $H \in H(X)$，则由引理 2.9.1

$$\{\alpha \in I \mid x \in H(\alpha)\} = \begin{cases} [0,t), & x \notin H(t) \\ [0,t], & x \in H(t) \end{cases}$$

如果 P 是 $(I, \mathscr{B}_0)$ 上的均匀分布概率，则由式(2.135) $A(x) = t$，所以

$$\{\alpha \in I \mid x \in H(\alpha)\} = \begin{cases} [0,A(t)), & x \notin H(t) \\ [0,A(t)], & x \in H(t) \end{cases} \tag{2.139}$$

其中
$$t = \vee \{\alpha \in I \mid x \in H(\alpha)\}.$$

我们把 X 上的每一个集合套 H 看做是和 I 对应的套点 x 的集值统计试验. 对 $\alpha \in I$，若 $x \in H(\alpha)$，就认为 $H(\alpha)$ 套住了 x，若 $x \notin H(\alpha)$，就认为 $H(\alpha)$ 没有套住 x. 由式(2.139)知，若 $\alpha < A(t)$，则 $H(\alpha)$ 套住 x. 若 $\alpha > A(t)$，则 $H(\alpha)$ 没有套住 x，反之若 $H(\alpha)$ 套住 x，则 $\alpha < A(x)$，$H(\alpha)$ 没有套住 x，则 $\alpha > A(t)$. 如果集值统计试验

H套点x是独立的和等可能的,则取$\alpha \in I$也是独立的等可能的,而取$\alpha \in I$,使$\alpha < A(t)$的概率为$A(t)$,所以$H(\alpha)$套住x的概率也是$A(x)$.

由此得结论:

定理2.9.4 设H是套点x的等可能的重复独立集值试验,则H套住x的概率等于模糊集$A = \bigcup\limits_{\alpha \in I} \lambda H(\alpha)$在点$x$的隶属度.

所以,我们可以用等可能的重复独立集值试验对x的覆盖频率来估计某模糊集在x处的隶属度.

习 题 2

1. 设论域$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $A, B \in F(X)$.

$$A = \frac{0.3}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{0.9}{x_4} + \frac{0.7}{x_5} + \frac{0.2}{x_6}$$

$$B = \frac{0.7}{x_1} + \frac{0.9}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{0.3}{x_4} + \frac{0.1}{x_5} + \frac{0.8}{x_6}$$

求$A \cap B, A \cup B, A' \cap B', A' \cup B'$.

2. 设$A, B, C \in F(X)$,证明对偶律.

(1)$(A \cap B)' = A' \cup B'$;　(2)$(A \cup B)' = A' \cap B'$.

3. 设$A, B \in F(X)$, A和B的差定义为

$$A - B = A \cap B'$$

A和B的对称差定义为

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

试用$A(x)$, $B(x)$表示$A - B$和$A \Delta B$的隶属度.

4. 设$A, A_t \in F(X)$ $(t \in T)$,证明无穷分配律.

(1)$A \cup (\bigcap\limits_{t \in T} A_t) = \bigcap\limits_{t \in T} (A \cup A_t)$;　(2)$A \cap (\bigcup\limits_{t \in T} A_t) = \bigcup\limits_{t \in T} (A \cap A_t)$.

5. 证明T_1和S_1, T_2和S_2, T_∞和S_∞是三对对偶模,并举例说明它们不满足幂等律、吸收律和补余律.

6. 设$r \geq 1$,定义:$\forall a, b \in [0,1]$.

$$T^{(r)}(a,b) = 1 - \min\{1, [(1-a)^r + (1-b)^r]^{\frac{1}{r}}\}$$

$$S^{(r)}(a,b) = \min\{1, (a^r + b^r)^{\frac{1}{r}}\}$$

证明$T^{(r)}$和$S^{(r)}$是一对对偶的T模和S模.

7. 设$\lambda \geq 0$,定义:$\forall a, b \in [0,1]$.

$$T^{(\lambda)}(a,b) = \frac{ab}{\lambda + (1-\lambda)(a + b - ab)}$$

$$S^{(\lambda)}(a,b) = \frac{a + b - (\lambda - 2)ab}{1 + (\lambda - 1)ab}$$

证明 $T^{(\lambda)}$ 和 $S^{(\lambda)}$ 是一对对偶的 T 模和 S 模.

8. 设 $A \in F(X)$, $\forall \lambda, \mu \in [0,1]$, $\lambda < \mu$, 证明 $A_{\mu} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

9. 设 $\{A_t \mid t \in T\} \subseteq F(X)$, $\lambda \in [0,1]$, 证明:

(1) $(\bigcup_{t \in T} A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{t \in T} (A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$; (2) $(\bigcap_{t \in T} A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcap_{t \in T} (A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

10. 设 $A \in F(X)$, $\forall \lambda \in [0,1]$, 证明:

(1) $A_{\lambda} = \bigcap_{\alpha < \lambda} A_{\alpha}$; (2) $A_{\lambda} \supseteq \bigcup_{\alpha > \lambda} A_{\alpha}$; (3) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$; (4) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$.

11. 设 $A \in F(X)$, $\forall \lambda \in [0,1]$, 证明:

(1) $(A')_{\lambda} = (A_{1-\underset{\cdot}{\lambda}})'$; (2) $(A')_{\underset{\cdot}{\lambda}} = (A_{1-\lambda})'$.

12. 证明分解定理 2: 设 $A \in F(X)$, $A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

13. 设 $A \in F(X)$, $L \subseteq [0,1]$, L 是稠密子集, 证明 $A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\lambda} = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

14. 设 $H(X)$ 是 X 上的集合套集合, 证明代数系统 $(H(X), \cap, \cup, ')$ 是完全分配格.

15. 设 $H(X)$ 是 X 上的集合套集合, 证明 $(H(X), \cap, \cup, ')$ 是模系.

16. 利用表现定理证明 $\forall A_t \in F(X)$ $(t \in T)$,

$$A \cap (\bigcup_{t \in T} A_t) = \bigcup_{t \in T} (A \cap A_t).$$

17. 设 $f: X \to Y$, 证明:

(1) $(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}}))(y) = \bigvee_{f(x)=y} A(x)$ $(y \in Y)$;

(2) $(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\lambda}}))(y) = B(f(x))$ $(x \in X)$.

18. $A^{(i)} \in F(X_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 证明:

(1) $(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})_{\lambda} = A_{\lambda}{}^{(1)} \times A_{\lambda}{}^{(2)} \times \cdots \times A_{\lambda}{}^{(n)}$;

(2) $(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}}{}^{(1)} \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}{}^{(2)} \times \cdots \times A_{\underset{\cdot}{\lambda}}{}^{(n)}$.

19. 设 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, 且 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, 证明:

(1) $(g \circ f)(A)(x) = \bigvee \{\alpha \mid x \in g(f(A_{\alpha}))\}$, $A \in F(X)$;

(2) $(g \circ f)^{-1}(B)(z) = \bigvee \{\alpha \mid z \in f^{-1}(g^{-1}(B_{\alpha}))\}$, $B \in F(Z)$.

第 3 章　L 型模糊集

§3.1　L 型模糊集及其分解定理

定义 3.1.1　设 X 是集合，$(L, \wedge, \vee)$ 是格，则映射

$$A: X \to L, \quad x \to A(x)$$

称为X上的一个 L 型模糊集，简称 L—F 集. 此时，X 称为论域，L 称为值格，$\forall x \in X$，$A(x)$称为 x 关于 A 的隶属度.

X 上的 L 型模糊集全体记为 $F_L(X)$或 L^X，即

$$F_L(X) = \{A \mid A: X \to L\} \tag{3.1}$$

定义 3.1.2　设 $A, B \in F_L(X)$.

(1)若 $\forall x \in X, A(x) \leqslant B(x)$，则称 A 包含于 B，或称 B 包含 A，记为 $A \subseteq B$；

(2)若 $\forall x \in X, A(x) = B(x)$，则称 A 和 B 相等，记为 $A = B$.

显然，$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

定义 3.1.3　设 $A, B \in F_L(X)$，$\forall x \in X$，定义

(1)
$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x) \tag{3.2}$$

(2)
$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) \tag{3.3}$$

分别称为 A 和 B 的并和交.

如果 L 是完备格，$\{A_t \mid t \in T\} \subseteq F_L(X)$，记

(3)
$$(\bigcup_{t \in T} A_t)(x) = \bigvee_{t \in T} A_t(x) \tag{3.4}$$

(4)
$$(\bigcap_{t \in T} A_t)(x) = \bigwedge_{t \in T} A_t(x) \tag{3.5}$$

分别称为$\{A_t \mid t \in T\}$的无限并和无限交.

定义 3.1.4　设格 L 上有逆序对合对应“′”，$\forall x \in X$，记

$$A'(x) = (A(x))' \tag{3.6}$$

称 A'为 A 的补集.

由于 $F_L(X)$上的运算 $\cup, \cap, '$是由 L 上的运算 $\vee, \wedge, '$定义的，所以$(L, \wedge, \vee)$是格，则$(F_L(X), \wedge, \vee)$是格；若 L 是分配格，则 $F_L(X)$是分配格；若 L 是完备格，则 $F_L(X)$ 是完备格；若$(L, \wedge, \vee, ')$是具有逆序对合对应的完全分配格，则$(F_L(X), \cap, \cup, ')$也是具有逆序对合对应的完全分配格，即 $F_L(X)$是模糊格.

例 3.1.1 设 $L=P(Y)$,令

$$A:X\to P(Y)$$

由于$(P(Y),\cap,\cup)$是完全分配格,则$(F_L(X),\cap,\cup)$也是完全分配格.此时,A 的隶属函数的值是 Y 的子集,A 称为 X 到 $P(Y)$的集值映射.

例 3.1.2 设 $L=F_{[0,1]}(X)$是 X 上的模糊集全体,令

$$A:X\to F_{[0,1]}(X)$$

是 X 上的二型模糊集.此时,A 的隶属度 $A(x)$是 X 上的一个模糊集.

例 3.1.3 设 $L=\{[a,b]\mid a\leqslant b,a,b\in[0,1]\}$,$\forall[a,b],[c,d]\in L$,定义

$$[a,b]\leqslant[c,d]\Leftrightarrow a\leqslant c,b\leqslant d$$

则$(L,\leqslant)$是格,又定义

$$([a,b])'=[1-b,1-a]$$

是 L 中的伪补.$\forall[a_t,b_t]\in L(t\in T)$,定义

$$\bigvee_{t\in T}[a_t,b_t]=[\bigvee_{t\in T}a_t,\bigvee_{t\in T}b_t]$$

$$\bigwedge_{t\in T}[a_t,b_t]=[\bigwedge_{t\in T}a_t,\bigwedge_{t\in T}b_t]$$

则 L 是完备格,即 L 是具有伪补的完备格.令

$$A:X\to L$$

则$(F_L(X),\wedge,\vee,')$是具有伪补的完备格,$A(x)$是$[0,1]$中的一个区间数.

定义 3.1.5 设 $A\in F_L(X)$,$\forall\lambda\in L$,记

$$A_\lambda=\{x\in X\mid A(x)\geqslant\lambda\}\tag{3.7}$$

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\{x\in X\mid A(x)>\lambda\}\tag{3.8}$$

分别称为 L 型模糊集 A 的 λ 截集和 λ 强截集.

显然,(1)$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq A_\lambda\subseteq X$.

(2)$\forall\lambda,\mu\in L$,若 $\lambda\leqslant\mu$,则 $A_\mu\subseteq A_\lambda$,$A_{\underset{\cdot}{\mu}}\subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$,$A_\mu\subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

定理 3.1.1 设 L 是格,$A,B\in F_L(X)$,$\forall\lambda\in L$,则:

(1) $$(A\cup B)_\lambda\supseteq A_\lambda\cup B_\lambda\tag{3.9}$$

(2) $$(A\cap B)_\lambda=A_\lambda\cap B_\lambda\tag{3.10}$$

(3) $$(A\cup B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\supseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}}\tag{3.11}$$

(4) $$(A\cap B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteqq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cap B_{\underset{\cdot}{\lambda}}\tag{3.12}$$

证明 只证(1)、(2),其他类似证明.

(1)$\forall x\in A_\lambda\cup B_\lambda\Rightarrow x\in A_\lambda$ 或 $x\in B_\lambda\Rightarrow A(x)\geqslant\lambda$ 或 $B(x)\geqslant\lambda\Rightarrow A(x)\vee B(x)\geqslant\lambda\Rightarrow(A\cup B)(x)\geqslant\lambda\Rightarrow x\in(A\cup B)_\lambda$.所以 $A_\lambda\cup B_\lambda\subseteq(A\cup B)_\lambda$.

(2)$\forall x\in(A\cap B)_\lambda\Leftrightarrow(A\cap B)(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow A(x)\wedge B(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow A(x)\geqslant\lambda$ 且 $B(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow x\in A_\lambda$ 且 $x\in B_\lambda\Leftrightarrow x\in A_\lambda\cap B_\lambda$,所以$(A\cap B)_\lambda=A_\lambda\cap B_\lambda$.

若 L 是全序集,易证定理 3.1.1 中的 4 个式子等式成立.

定理 3.1.2 设 L 是完备格,$\{A_t\mid t\in T\}\subseteq F_L(X)$,$\forall\lambda\in L$,则:

(1)
$$\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)_\lambda \supseteq \bigcup_{t\in T}(A_t)_\lambda \tag{3.13}$$

(2)
$$\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)_\lambda = \bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda \tag{3.14}$$

(3)
$$\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \supseteq \bigcup_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{3.15}$$

(4)
$$\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcap_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{3.16}$$

若L是稠密的完备格,(3)的等号成立,即

$$\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{3.17}$$

证明　只证(2)、(3),其他类似证明.

(2) $\forall x\in\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)_\lambda \Leftrightarrow \left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)(x)\geqslant\lambda \Leftrightarrow \bigwedge_{t\in T}A_t(x)\geqslant\lambda \Leftrightarrow \forall t\in T, A_t(x)\geqslant\lambda \Leftrightarrow \forall t\in T, x\in(A_t)_\lambda \Leftrightarrow x\in\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda$,所以$\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)_\lambda=\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda$.

(3) $\forall x\in\bigcup_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \Rightarrow \exists t\in T, x\in(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \Rightarrow \exists t\in T, A_t(x)>\lambda \Rightarrow \bigvee_{t\in T}A_t(x)>\lambda \Rightarrow \left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)(x)>\lambda \Rightarrow x\in\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$,所以$\bigcup_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

若L是稠密格,(3)的推导过程的逆全成立,故$\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

定理 3.1.3　设L是完备格,$A\in F_L(X)$,$\{\alpha_t \mid t\in T\}\subseteq L$,若$\bigvee_{t\in T}\alpha_t=\alpha$,$\bigwedge_{t\in T}\alpha_t=\beta$,则:

(1)
$$A_\alpha=\bigcap_{t\in T}A\alpha_t \tag{3.18}$$

(2)
$$A_\beta\supseteq\bigcup_{t\in T}A\alpha_t \tag{3.19}$$

(3)
$$A_{\underset{\cdot}{\alpha}}\subseteq\bigcap_{t\in T}A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}} \tag{3.20}$$

(4)
$$A_{\underset{\cdot}{\beta}}\supseteq\bigcup_{t\in T}A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}} \tag{3.21}$$

若L是稠密的完备格,(4)的等号成立,即

$$A_{\underset{\cdot}{\beta}}=\bigcup_{t\in T}A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}} \tag{3.22}$$

证明　只证(1)、(4),其他类似证明.

(1)因为$\bigvee_{t\in T}\alpha_t=\alpha \Rightarrow \forall t\in T, \alpha_t\leqslant\alpha \Rightarrow A_\alpha\subseteq A\alpha_t \Rightarrow A_\alpha\subseteq\bigcap_{t\in T}A\alpha_t$.

反之,$\forall x\in\bigcap_{t\in T}A\alpha_t \Rightarrow \forall t\in T, x\in A\alpha_t \Rightarrow \forall t\in T, A(x)\geqslant\alpha_t \Rightarrow A(x)\geqslant\bigvee_{t\in T}\alpha_t=\alpha \Rightarrow x\in A_\alpha \Rightarrow \bigcap_{t\in T}A\alpha_t\subseteq A_\alpha$,所以$A_\alpha=\bigcap_{t\in T}A\alpha_t$.

(4) $\forall x\in\bigcup_{t\in T}A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}} \Rightarrow \exists t\in T, x\in A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}} \Rightarrow \exists t\in T, A(x)>\alpha_t \Rightarrow A(x)>\bigwedge_{t\in T}\alpha_t=\beta \Rightarrow x\in A_{\underset{\cdot}{\beta}}$,所以,$\bigcup_{t\in T}A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}}\subseteq A_{\underset{\cdot}{\beta}}$.

若L是稠密的完备格,

$\forall x\in A_{\underset{\cdot}{\beta}} \Rightarrow A(x)>\beta=\bigwedge_{t\in T}\alpha_t \Rightarrow \exists t\in T, A(x)>\alpha_t>\beta \Rightarrow \exists t\in T, x\in A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}} \Rightarrow x\in\bigcup_{t\in T}A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}} \Rightarrow A_{\underset{\cdot}{\beta}}\subseteq\bigcup_{t\in T}A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}}$,所以$A_{\underset{\cdot}{\beta}}=\bigcup_{t\in T}A_{\underset{\cdot}{\alpha_t}}$.

推论 3.1.1　设L是完备格,$A\in F_L(X)$,则:

(1)
$$A_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}A_\alpha \tag{3.23}$$

(2) $$A_{\lambda} \supseteq \bigcup_{\alpha > \lambda} A_{\alpha} \tag{3.24}$$

(3) $$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \tag{3.25}$$

(4) $$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \supseteq \bigcup_{\alpha > \lambda} A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \tag{3.26}$$

若 L 是稠密完备格,(4)的等号成立,即

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \tag{3.27}$$

定理 3.1.4(分解定理 1,2) 设 L 是完备格,$A \in F_L(X)$,则:

(1) $$A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\lambda} \tag{3.28}$$

(2) $$A \supseteq \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{3.29}$$

若 L 是稠密完备格,(2)的等号成立,即

$$A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{3.30}$$

证明 (1) $$\left(\bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\lambda}\right)(x) = \bigvee_{\lambda \in L} (\lambda \wedge A_{\lambda}(x)) = \bigvee_{A(x) \geqslant \lambda} (\lambda \wedge A_{\lambda}(x)) = \bigvee_{A(x) \geqslant \lambda} \lambda = A(x).$$

所以 $A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\lambda}$.

(2) $\forall \lambda \in L$,因 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq A_{\lambda}$,

$A(x) = \bigvee_{\lambda \in L} (\lambda \wedge A_{\lambda}(x)) \geqslant \bigvee_{\lambda \in L} (\lambda \vee A_{\underset{\cdot}{\lambda}}(x)) = \left(\bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\right)(x)$ 即 $A \supseteq \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

若 L 是稠密的完备格.

$$\left(\bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\right)(x) = \bigvee_{\lambda \in L} (\lambda \wedge A_{\underset{\cdot}{\lambda}}(x)) = \bigvee_{\lambda < A(x)} (\lambda \wedge A_{\underset{\cdot}{\lambda}}(x)) = \bigvee_{\lambda < A(x)} \lambda = A(x)$$

所以 $A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

定理 3.1.5 设 L 是完备格,$A, B \in F_L(X)$,则:

(1) $$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall \lambda \in L, A_{\lambda} \subseteq B_{\lambda} \tag{3.31}$$

(2) $$A = B \Leftrightarrow \forall \lambda \in L, A_{\lambda} = B_{\lambda} \tag{3.32}$$

若 L 是稠密的完备格,则:

(3) $$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall \lambda \in L, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq B_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{3.33}$$

(4) $$A = B \Leftrightarrow \forall \lambda \in L, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = B_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{3.34}$$

证明 因为 $A(x) = \bigvee_{\lambda \in L} (\lambda \wedge A_{\lambda}(x))$,$B(x) = \bigvee_{\lambda \in L} (\lambda \wedge B_{\lambda}(x))$,

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X, A(x) \leqslant B(x) \Leftrightarrow \forall x \in X, A_{\lambda}(x) \leqslant B_{\lambda}(x) \Leftrightarrow A_{\lambda} \subseteq B_{\lambda}$.

(2) $A = B \Leftrightarrow \forall x \in X, A(x) = B(x) \Leftrightarrow \forall x \in X, A_{\lambda}(x) = B_{\lambda}(x) \Leftrightarrow A_{\lambda} = B_{\lambda}$.

(3)和(4)的证明类似.

定理 3.1.6(分解定理 3) 设 L 是稠密的完备格,$A \in F_L(X)$,若映射 $H: L \to P(X)$ 满足:$\forall \lambda \in L, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_{\lambda}$,则:

(1) $$A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda) \tag{3.35}$$

(2) $$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_2) \subseteq H(\lambda_1) \tag{3.36}$$

(3)
$$A_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) \quad (\lambda \neq 0) \tag{3.37}$$
$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha) \quad (\lambda \neq 1) \tag{3.38}$$

证明　(1) $\forall \lambda \in L$,由于 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$,故 $A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_\lambda = A$,所以 $A = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda)$.

(2) $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_2) \subseteq A_{\lambda_2} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda_1}} \subseteq H(\lambda_1)$.

(3) 当 $\lambda \neq 0$ 时, $\forall \alpha < \lambda, H(\alpha) \supseteq A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \supseteq A_\lambda$,由此 $\bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) \supseteq A_\lambda$. 又因为
$$\bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha = A_\lambda$$
所以 $A_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$.

另外, $\lambda \neq 1$, $\forall \alpha > \lambda, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \supseteq A_\alpha \supseteq H(\alpha)$,则 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \supseteq \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha)$.

$\forall x \in A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \Rightarrow A(x) > \lambda \Rightarrow \exists \alpha \in L, A(x) > \alpha > \lambda, \Rightarrow \exists \alpha \in L, x \in A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \Rightarrow x \in \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha) \Rightarrow A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha)$. 所以 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha)$.

§3.2　L 型模糊集的表现定理

定义 3.2.1　设 X 是论域, L 是完备格,若映射 $H: L \to P(X)$ 满足:

(1) $\forall \lambda, \mu \in L, \lambda \leqslant \mu$,则
$$H(\mu) \subseteq H(\lambda) \tag{3.39}$$

(2) 若 $\{\lambda_t \mid t \in T\} \subseteq L, \lambda = \bigvee_{t \in T} \lambda_t$,则
$$\bigcap_{t \in T} H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) \tag{3.40}$$
则称 H 是 X 上的一个 L 型集合套, X 上的 L 型集合套全体记为 $H_L(X)$.

注:若 L 是稠密的完备格,由式(3.39)可以推出式(3.40).

事实上, $\forall x \in \bigcap_{t \in T} H(\lambda_t) \Rightarrow \forall t \in T, x \in H(\lambda_t)$,由于 $\lambda = \bigvee_{t \in T} \lambda_t$,则 $\forall \alpha < \lambda, \exists t \in T, \alpha < \lambda_t < \lambda$,则 $\forall \alpha < \lambda, x \in H(\alpha) \Rightarrow x \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$. 所以 $\bigcap_{t \in T} H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$.

定理 3.2.1　设 L 是完备格, $\forall A \in F_L(X)$,令

(1) $\forall \lambda \in L, H(\lambda) = A_\lambda$;

(2) $\forall \lambda \in L, H(\lambda) = A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

则 H 都是 X 上的 L 型集合套.

证明　(1) 显然 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_2) \subseteq H(\lambda_1)$. 设

$\lambda = \bigvee_{t \in T} \lambda_t, x \in \bigcap_{t \in T} H(\lambda_t) \Rightarrow \forall t \in T, x \in A_{\lambda_t} \Rightarrow \forall t \in T, A(x) \geqslant \lambda_t \Rightarrow A(x) \geqslant \bigvee_{t \in T} \lambda_t = \lambda \Rightarrow x \in A_\lambda \Rightarrow \forall \alpha < \lambda, x \in A_\alpha = H(\alpha) \Rightarrow x \in \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$.

所以 $\bigcap_{t \in T} H(\lambda t) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$.

同理证明(2).

定理 3.2.2 设 L 是稠密的完备格,若 $\forall \alpha \in L, A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq A_\alpha$. 则 H 是 X 上的一个 L 型集合套.

证明 若 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$,则

$$H(\lambda_2) \subseteq A_{\lambda_2} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda_1}} \subseteq H(\lambda_1)$$

设 $\lambda = \bigvee_{t \in T} \lambda_t$,则

$$\bigcap_{t \in T} H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{t \in T} A_{\lambda_t} = A_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha)$$

故 H 是 L 型集合套.

定义 3.2.2 设 L 是完备格,$H_1, H_2 \in H_L(X)$.

(1)若 $\forall \lambda \in L, H_1(\lambda) \subseteq H_2(\lambda)$,则称 H_2 包含 H_1,记为 $H_1 \subseteq H_2$.

(2)若 $\forall \lambda \in L, H_1(\lambda) = H_2(\lambda)$,则称 H_1 和 H_2 相等,记为 $H_1 = H_2$.

显然,$(H_L(X), \subseteq)$是偏序集.

定义 3.2.3 设$\{H_t \mid t \in T\} \subseteq H_L(X)$, $\forall \lambda \in L$,定义

$$\left(\bigcap_{t \in T} H_t\right)(\lambda) = \bigcap_{t \in T} H_t(\lambda) \tag{3.41}$$

定理 3.2.3 设$\{H_t \mid t \in T\} \subseteq H_L(X)$,则$\bigcap_{t \in T} H_t \in H_L(X)$.

证明 若 $\lambda \leqslant \mu$,则 $\forall t \in T, H_t(\mu) \subseteq H_t(\lambda)$,故$\bigcap_{t \in T} H_t(\mu) \subseteq \bigcap_{t \in T} H_t(\lambda)$,从而

$$\left(\bigcap_{t \in T} H_t\right)(\mu) \subseteq \left(\bigcap_{t \in T} H_t\right)(\lambda).$$

另外,令 $\lambda = \bigvee_{s \in S} \lambda s$,因为 $H_t \in H_L(X)$,则$\bigcap_{s \in S} H_t(\lambda_s) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} H_t(\alpha)$,于是

$$\bigcap_{t \in T} \bigcap_{s \in S} H_t(\lambda_s) \subseteq \bigcap_{t \in T} \bigcap_{\alpha < \lambda} H_t(\alpha)$$

从而

$$\bigcap_{s \in S} \bigcap_{t \in T} H_t(\lambda_s) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} \bigcap_{t \in T} H_t(\alpha)$$

即

$$\bigcap_{s \in S} \left(\bigcap_{t \in T} H_t\right)(\lambda_s) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} \left(\bigcap_{t \in T} H_t\right)(\alpha)$$

所以

$$\bigcap_{t \in T} H_t \in H_L(X).$$

定义 3.2.4 设$\{H_t \mid t \in T\} \subseteq H_L(X)$,分别称:

(1)
$$\bigcap_{t \in T} H_t \tag{3.42}$$

(2)
$$\bigcup_{t \in T} H_t = \cap \{H \in H_L(X) \mid \forall t \in T, H_t \subseteq H\} \tag{3.43}$$

为$\{H_t \mid t \in T\}$的交和并.

注:由于$\cup \{H_t \mid t \in T\}$通常并不一定属于 $H_L(X)$,故$\bigcup_{t \in T} H_t$ 由式(3.43)定义.

代数系统$(H_L(X), \cap, \cup)$在式(3.42),式(3.43)的定义下是完备格,$H_L(X)$的最大元记为 $\overline{X}$,最小元记为$\overline{\varnothing}$,即 $\forall \lambda \in L$

$$\overline{X}(\lambda) = X, \quad \overline{\varnothing}(\lambda) = \varnothing$$

定义 3.2.5 设 L 是完备格,$\forall H_1, H_2 \in H_L(X)$,在 $H_L(X)$中定义关系"~"为:$\forall \lambda \in L$

$$H_1 \sim H_2 \Leftrightarrow \bigcap_{\alpha < \lambda} H_1(\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} H_2(\alpha) \tag{3.44}$$

容易验证"~"是 $H_L(X)$中的等价关系.

$\forall H\in H_L(X)$，记

$$[H]=\{H_1\in H_L(X)\mid H_1\sim H\}\tag{3.45}$$

$$H_L^*(X)=\{[H]\mid H\in H_L(X)\}\tag{3.46}$$

定理 3.2.4　设 L 是稠密的完备格，则 $\forall H\in H_L(X)$，有：

(1) $$\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)\tag{3.47}$$

(2) $$\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcup_{\beta>\alpha}H(\beta)\tag{3.48}$$

证明　(1)若 $\beta<\alpha,H(\alpha)\subseteq H(\beta)$，则 $H(\alpha)\subseteq\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)$，从而

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)\subseteq\bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta).$$

另外，由 L 的稠密性，当 $\alpha>\lambda$ 时，$\exists\mu\in L,\alpha>\mu>\lambda$，则 $H(\alpha)\subseteq H(\mu)\subseteq H(\lambda)$，从而　$\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)\subseteq H(\mu)\subseteq\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)$，故 $\bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)\subseteq\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)$.

所以 $\bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcup_{\beta<\alpha}H(\beta)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)$.

同理证明(2).

定理 3.2.5　设 L 是稠密的完备格，则 $\forall H_1,H_2\in H_L(X)$，$\forall\lambda\in L$ 有

$$H_1\sim H_2\Leftrightarrow\bigcup_{\alpha>\lambda}H_1(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H_2(\alpha)\tag{3.49}$$

证明　因为 $H_1\sim H_2\Leftrightarrow\bigcap_{\alpha<\lambda}H_1(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H_2(\alpha)$ 从而

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}H_2(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\Big(\bigcap_{\beta<\alpha}H_2(\beta)\Big)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\Big(\bigcap_{\beta<\alpha}H_1(\beta)\Big)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H_1(\alpha).$$

反之，设 $\bigcup_{\alpha>\lambda}H_1(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H_2(\alpha)$.

从而 $\bigcap_{\alpha<\lambda}H_2(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\Big(\bigcup_{\beta>\alpha}H_2(\beta)\Big)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\Big(\bigcup_{\beta>\alpha}H_1(\beta)\Big)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H_1(\alpha)$，所以 $H_1\sim H_2$.

定理 3.2.6　设 L 是稠密的完备格，$\forall H\in H_L(X)$，记

$$F_H(\lambda)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha),\quad \underset{\cdot}{F}_H(\lambda)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)\tag{3.50}$$

则(1) F_H 和 $\underset{\cdot}{F}_H$ 由 $[H]$ 唯一确定，且 $F_H,\underset{\cdot}{F}_H\in H_L(X)$.

(2) $\forall H\in[H]$，$$\underset{\cdot}{F}_H\subseteq H\subseteq F_H\tag{3.51}$$

(3) $\lambda<\mu$，则 $$F_H(\mu)\subseteq \underset{\cdot}{F}_H(\lambda)\tag{3.52}$$

(4) $$\bigcap_{\alpha<\lambda}F_H(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\underset{\cdot}{F}_H(\alpha)=F_H(\lambda)\tag{3.53}$$

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}F_H(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\underset{\cdot}{F}_H(\alpha)=\underset{\cdot}{F}_H(\lambda)\tag{3.54}$$

证明　(1)由等价条件式(3.44)，式(3.49)知，F_H 和 $\underset{\cdot}{F}_H$ 被 $[H]$ 唯一确定.

$\forall\lambda,\mu\in L$，若 $\lambda<\mu$，则 $H(\mu)\subseteq H(\lambda)$，从而

$$F_H(\mu)=\bigcap_{\alpha<\mu}H(\alpha)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)=F_H(\lambda)$$

$$\underset{\cdot}{F}_H(\mu)=\bigcup_{\alpha>\mu}H(\alpha)\subseteq\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)=\underset{\cdot}{F}_H(\lambda).$$

设 $\{\lambda_t\mid t\in T\}\subseteq L$，且 $\lambda=\bigvee_{t\in T}\lambda_t$，则

$$\bigcap_{t\in T}F_H(\lambda_t)=\bigcap_{t\in T}\bigcap_{\beta<\lambda_t}H(\beta)=\bigcap\{H(\beta)\mid\forall t\in T,\beta<\lambda_t\}\subseteq\bigcap\{H(\beta)\mid\beta<\bigvee_{t\in T}\lambda_t\}$$

$$=\bigcap\{H(\beta)\mid\beta<\lambda\}=\bigcap_{\beta<\lambda}H(\beta)=F_H(\lambda)\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}F_H(\alpha)$$

所以 $F_H \in H_L(X)$.

由于 $\forall \alpha > \lambda, H(\alpha) \subseteq H(\lambda)$，则 $F_H(\lambda) = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha) \subseteq H(\lambda)$，从而

$$\bigcap_{t \in T} F_H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{t \in T} H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} \bigcup_{\beta > \alpha} H(\beta) = \bigcap_{\alpha < \lambda} F_H(\alpha)$$

所以 $F_H \in H_L(X)$.

(2) 上面已证 $\forall \lambda \in L, F_H(\lambda) \subseteq H(\lambda)$，故 $F_H \subseteq H$. 因为 $\forall \alpha < \lambda, H(\lambda) \subseteq H(\alpha)$，故 $H(\lambda) \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) = F_H(\lambda)$，故 $H \subseteq F_H$，所以 $F_H \subseteq H \subseteq F_H$.

(3) 若 $\lambda < \mu$，由于 L 是稠密格，$\exists \alpha \in L, \lambda < \alpha < \mu$，则 $H(\mu) \subseteq H(\alpha) \subseteq H(\lambda)$，从而

$$F_H(\mu) = \bigcap_{\beta < \mu} H(\beta) \subseteq H(\alpha) \subseteq \bigcup_{\beta > \lambda} H(\beta) = F_H(\lambda).$$

(4) $\forall \lambda \in L$

$$\bigcap_{\alpha < \lambda} F_H(\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} \bigcup_{\beta > \alpha} H(\beta) = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) = F_H(\lambda)$$

$$\bigcap_{\alpha < \lambda} F_H(\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} \bigcap_{\beta < \alpha} H(\beta) = \bigcap_{\beta < \lambda} H(\beta) = F_H(\lambda)$$

所以 $\bigcap_{\alpha < \lambda} F_H(\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} F_H(\alpha) = F_H(\lambda)$.

同理证明 $\bigcup_{\alpha > \lambda} F_H(\alpha) = \bigcup_{\alpha > \lambda} F_H(\alpha) = F_H(\lambda)$.

为了定义等价类的运算，现证明并、交运算与代表无关.

定理 3.2.7 设 L 是稠密的完备格，$H_t, H_t^* \in H_L(X)$ $(t \in T)$，且 $\forall t \in T, H_t \sim H_t^*$，则

(1)
$$\bigcap_{t \in T} H_t \sim \bigcap_{t \in T} H_t^* \tag{3.55}$$

(2)
$$\bigcup_{t \in T} H_t \sim \bigcup_{t \in T} H_t^* \tag{3.56}$$

证明 (1) 由于 $\forall t \in T, \bigcap_{\alpha < \lambda} H_t(\alpha) = \bigcap_{\alpha < \lambda} H_t^*(\alpha)$，则

$$\begin{aligned}\bigcap_{\alpha < \lambda} (\bigcap_{t \in T} H_t)(\alpha) &= \bigcap_{\alpha < \lambda} \bigcap_{t \in T} H_t(\alpha) = \bigcap_{t \in T} \bigcap_{\alpha < \lambda} H_t(\alpha) = \bigcap_{t \in T} \bigcap_{\alpha < \lambda} H_t^*(\alpha) \\ &= \bigcap_{\alpha < \lambda} \left(\bigcap_{t \in T} H_t^*(\alpha) \right) = \bigcap_{\alpha < \lambda} (\bigcap_{t \in T} H_t^*)(\alpha)\end{aligned}$$

所以，$\bigcap_{t \in T} H_t \sim \bigcap_{t \in T} H_t^*$.

(2) 由于 $\forall t \in T, \bigcup_{\alpha > \lambda} H_t = \bigcup_{\alpha > \lambda} H_t^*$，则

$$\begin{aligned}\bigcup_{\alpha > \lambda} (\bigcup_{t \in T} H_t)(\alpha) &= \bigcup_{\alpha > \lambda} \bigcup_{t \in T} H_t(\alpha) = \bigcup_{t \in T} \bigcup_{\alpha > \lambda} H_t(\alpha) = \bigcup_{t \in T} \bigcup_{\alpha > \lambda} H_t^*(\alpha) \\ &= \bigcup_{\alpha > \lambda} \bigcup_{t \in T} H_t^*(\alpha) = \bigcup_{\alpha > \lambda} (\bigcup_{t \in T} H_t^*)(\alpha)\end{aligned}$$

所以 $\bigcup_{t \in T} H_t \sim \bigcup_{t \in T} H_t^*$.

定义 3.2.6 设 L 是稠密的完备格.

(1) $\forall [H_1], [H_2] \in H_L^*(X)$，若 $\forall H_1 \in [H_1], H_2 \in [H_2], H_1 \subseteq H_2$，则称 $[H_2]$ 包含 $[H_1]$，记为 $[H_1] \subseteq [H_2]$.

(2) 若 $\{[H_t] \mid t \in T\} \subseteq H_L^*(X)$，记

$$\bigcap_{t\in T}[H_t]=[\bigcap_{t\in T}H_t] \tag{3.57}$$

$$\bigcup_{t\in T}[H_t]=[\bigcup_{t\in T}H_t] \tag{3.58}$$

分别称为集合套类$\{[H_t]\mid t\in T\}$的交和并.

由于集合套类的运算是由集合套的并、交运算定义的,所以,当 L 是稠密的完备格时,$(H_L^*(X),\cap,\cup)$是完备格.

定理 3.2.8(表现定理)　设 L 是稠密的完备格,令

$$f:H_L^*(X)\to F_L(X),\ \forall[H]\in H_L^*(X)$$

$$f([H])=\bigcup_{\lambda\in L}\lambda H(\lambda) \tag{3.59}$$

则 f 是 $H_L^*(X)$ 到 $F_L(X)$ 的双射,且 $\forall\lambda\in L$

$$(f([H]))_\lambda=F_H(\lambda) \tag{3.60}$$

$$(f([H]))_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\underset{\cdot}{F}_H(\lambda) \tag{3.61}$$

证明　先证 f 是映射.

$\forall[H]\in H_L^*(X)$,因 $\underset{\cdot}{F}_H(\lambda)\subseteq H(\lambda)\subseteq F_H(\lambda)$,则

$$\bigcup_{\lambda\in L}\lambda\,\underset{\cdot}{F}_H(\lambda)\subseteq\bigcup_{\lambda\in L}\lambda H(\lambda)\subseteq\bigcup_{\lambda\in L}\lambda F_H(\lambda)$$

由于 L 是稠密的,$\forall\lambda\in L-\{0\}$,$\exists\alpha\in L,0<\alpha<\lambda$,且 $F_H(\lambda)\subseteq\underset{\cdot}{F}_H(\alpha)$,则

$$\bigcup_{\lambda\in L}\lambda F_H(\lambda)=\bigcup_{\lambda\in L-\{0\}}\lambda F_H(\lambda)\subseteq\bigcup_{\alpha\in L}\alpha\,\underset{\cdot}{F}_H(\alpha)$$

所以
$$\bigcup_{\lambda\in L}\lambda F_H(\lambda)=\bigcup_{\lambda\in L}\lambda\,\underset{\cdot}{F}_H(\lambda)=\bigcup_{\lambda\in L}\lambda H(\lambda).$$

由于 $F_H,\underset{\cdot}{F}_H$,被$[H]$唯一确定,从而

$$f([H])=\bigcup_{\lambda\in L}\lambda H(\lambda)$$

是唯一的,即 f 是映射. 现证　$(f([H]))_\lambda=F_H(\lambda),(f([H]))_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\underset{\cdot}{F}_H(\lambda)$.

$\forall x\in F_H(\lambda)$,由 $f([H])=\bigcup_{\lambda\in L}\lambda F_H(\lambda)$知

$$f([H])(x)=\bigvee_{\alpha\in L}\alpha\wedge F_H(\alpha)(x)\geqslant\lambda\wedge F_H(\lambda)(x)=\lambda$$

则 $x\in(f([H]))_\lambda$,即 $F_H(\lambda)\subseteq f([H])_\lambda$.

反之,$\forall x\in(f([H]))_\lambda$,即$(f([H]))(x)\geqslant\lambda$. 而

$$(f([H]))(x)=\bigvee_{\lambda\in L}\lambda\wedge F_H(\lambda)(x)=\bigvee_{\lambda\in L}\{\lambda\mid x\in F_H(\lambda)\}\triangleq\alpha\geqslant\lambda$$

则$\exists\{\lambda_t\mid t\in T\}$,使$\bigvee_{t\in T}\lambda_t=\alpha$,且 $x\in F_H(\lambda_t)(\forall t\in T)$,故

$$x\in\bigcap_{t\in T}F_H(\lambda_t)\subseteq\bigcap_{\lambda<\alpha}F_H(\lambda)=F_H(\alpha)\subseteq F_H(\lambda)$$

由此$(f([H]))_\lambda\subseteq F_H(\lambda)$所以$(f([H]))_\lambda=F_H(\lambda)$.

同理证明$(f([H]))_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\underset{\cdot}{F}_H(\lambda)$.

最后证明 f 是双射.

设$[H_1],[H_2]\in H_L^*(X)$,若$f([H_1]=f([H_2])$,则

$$F_{H_1}(\lambda)=(f([H_1]))_\lambda=(f([H_2]))_\lambda=F_{H_2}(\lambda)$$

即$\bigcap_{\alpha<\lambda}H_1(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H_2(\alpha)$,故 $H_1\sim H_2$,所以$[H_1]=[H_2]$,即 f 是单射.

$\forall A \in F_L(X)$,令 $H_A: L \to P(X)$ 为 $\forall \lambda \in L$

$$H_A(\lambda) = A_\lambda$$

则 $H_A \in H_L(X)$,故 $\exists [H_A] \in H_L^*(X)$,使

$$f([H_A]) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H_A(\lambda) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda A_\lambda = A$$

于是 f 是满射,所以 f 是双射.

定理 3.2.9 设 L 是稠密的完备格,则代数系统($H_L^*(X)$, $\cap$, $\cup$)和($F_L(X)$, $\cap$, $\cup$)同构.

证明 由定理3.2.8知,$f: H_L^*(t) \to F_L(X)$,$f([H]) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda)$ 是双射. 现证 f 是同态映射. 设 $\{[H_t] \mid t \in T]\} \subseteq H_L^*(X)$,记

$$f(H_t) = A_t, f(H) = \bigcap_{t \in T} A_t$$

则 $F_H(\lambda) = (f(H))_\lambda = (\bigcap_{t \in T} A_t)_\lambda = \bigcap_{t \in T} (A_t)_\lambda = \bigcap_{t \in T} (f(H_t))_\lambda = \bigcap_{t \in T} F_{Ht}(\lambda) = (\bigcap_{t \in T} F_{Ht})(\lambda)$

即 $$F_H = \bigcap_{t \in T} F_{Ht}$$

由此 $$f(\bigcap_{t \in T} H_t) = f(\bigcap_{t \in T} F_{Ht}) = f(F_H) = f(H) = \bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} f(H_t)$$

所以 $$f(\bigcap_{t \in T} [H_t]) = f([\bigcap_{t \in T} H_t]) = f(\bigcap_{t \in T} H_t) = \bigcap_{t \in T} f(H_t) = \bigcap_{t \in T} f([H_t]).$$

现证 $f(\bigcup_{t \in T} [H_t]) = \bigcup_{t \in T} f([H_t])$

$\forall t \in T, H_t \subseteq \bigcup_{t \in T} H_t$,则 $[H_t] \subseteq [\bigcup_{t \in T} H_t] = \bigcup_{t \in T} [H_t]$,故 $f([H_t]) \subseteq f(\bigcup_{t \in T} [H_t])$,所以

$$\bigcup_{t \in T} f([H_t]) \subseteq f(\bigcup_{t \in T} [H_t]).$$

反之,由于 f 是满射,$\exists [H] \in H_L^*(X)$,使

$$f([H]) = \bigcup_{t \in T} f([H_t])$$

于是 $$f(\bigcup_{t \in T} [H_t]) = f(\cap \{[H] \mid \forall t \in T, [H_t] \subseteq [H]\})$$
$$= \cap \{f([H]) \mid \forall t \in T, [H_t] \subseteq [H]\}$$

因为 $\forall t \in T, [H_t] \subseteq [H]$,则 $\bigcup_{t \in T} [H_t] \subseteq [H]$,从而

$$f(\bigcup_{t \in T} [H_t]) \subseteq f([H]) = \bigcup_{t \in T} f([H_t]).$$

所以 $$f(\bigcup_{t \in T} [H_t]) = \bigcup_{t \in T} f([H_t])$$

即 $$(H_L^*(X), \cap, \cup) \cong (F_L(X), \cap, \cup).$$

推论 3.2.1 设 L 是稠密的完备格,$\forall H \in H_L(X)$,$f(H) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda H(\lambda)$. 则 f 是 $H_L(X)$ 到 $F_L(X)$ 的满同态映射,且:

(1) $$(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq (f(H))_\lambda \tag{3.62}$$

(2) $$(f(H))_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) = F_H(\lambda) \tag{3.63}$$

(3) $$(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha) = \underset{\cdot}{F}_H(\lambda) \tag{3.64}$$

§3.3 L 型模糊集的模系运算

设(L, $\leqslant$)是偏序集,并设 L 有唯一的最大元 1 和最小元 0.

若映射 $\triangle:L\times L\to L$ 满足：

(1) $$\triangle(0,0)=0,\quad \triangle(1,1)=1 \tag{3.65}$$

(2) $$\triangle(a,b)=\triangle(b,a) \tag{3.66}$$

(3) $$a\leqslant c,b\leqslant d,\text{则}\quad \triangle(a,b)\leqslant\triangle(c,d) \tag{3.67}$$

(4) $$\triangle(\triangle(a,b),c)=\triangle(a,\triangle(b,c)) \tag{3.68}$$

则称 $\triangle$ 为 L 中的一个三角模.

若 $\forall a\in L$, $\triangle(a,1)=a$,则称子 $\triangle$ 为 T 模,记为 T;

若 $\forall a\in L$, $\triangle(a,0)=a$,则称子 $\triangle$ 为 S 模,记为 S.

若映射 $N:L\to L$ 满足：

(1) $\forall a,b\in L,a\leqslant b$,则 $$N(b)\leqslant N(a) \tag{3.69}$$

(2) $\forall a\in L$, $$N(N(a))=a \tag{3.70}$$

则称 N 为 L 中的伪补.

定理 3.3.1　L 上的 T 模和 S 模满足两极律,即 $\forall a\in L$

$$T(a,0)=0,\quad S(a,1)=1 \tag{3.71}$$

证明　由于 $T(a,1)=a$,则 $T(0,1)=0$,又由单调性知

$$0=T(0,0)\leqslant T(0,a)\leqslant T(0,1)=0$$

故
$$T(a,0)=T(0,a)=0$$

同理证明 $S(a,1)=1$.

设 N 是 L 中的伪补,T 和 S 是 L 中的 T 模和 S 模,若满足：$\forall a,b\in L$

$$N(T(a,b))=S(N(a),N(b)) \tag{3.72}$$

$$N(S(a,b))=T(N(a),N(b)) \tag{3.73}$$

则称 T 和 S 关于 N 相互对偶,简称为对偶.

定义 3.3.1　设$(L,\leqslant)$是偏序集,T,S 是 L 中的 T 模和 S 模,N 为 L 中的伪补,若 T,S 关于 N 对偶,则称(L,S,T,N)为 L 型模系.

(1)若满足：$\forall a\in L$

$$T(a,a)=a,\quad S(a,a)=a \tag{3.74}$$

则称为幂等模系.

(2)若满足：$\forall a,b\in L$

$$T(a,S(a,b))=a \tag{3.75}$$

$$S(a,T(a,b))=a \tag{3.76}$$

则称为吸收模系.

(3)若满足：$\forall a,b,c\in L$

$$T(a,S(b,c))=S(T(a,b),T(a,c)) \tag{3.77}$$

$$S(a,T(b,c))=T(S(a,b),S(a,c)) \tag{3.78}$$

则称为分配模系.

定理 3.3.2　设$(L,\leqslant)$是偏序集,则 L 上的分配模系是吸收模系,吸收模系是

幂等模系.

证明 若 L 是分配模系,则 $\forall a,b\in L$

$$T(a,S(a,b))=T(S(a,0),\quad S(a,b)=S(a,T(0,b))=S(a,0)=a$$

$$S(a,T(a,b))=S(T(a,1),\quad T(a,b)=T(a,S(1,b))=T(a,1)=a$$

所以 L 是吸收模系.

设 L 是吸收模系,则 $\forall a\in L$

$$T(a,a)=T(a,S(a,0))=a$$

$$S(a,a)=S(a,T(a,1))=a$$

所以 L 是幂等模系.

定理 3.3.3 设$(L,\leqslant)$是偏序集,若 L 是幂等模系,则 $\forall a,b\in L$

$$a\leqslant b\Leftrightarrow T(a,b)=a\Leftrightarrow S(a,b)=b \tag{3.79}$$

证明 若 $a\leqslant b$,则 $a=T(a,a)\leqslant T(a,b)\leqslant T(a,1)=a$,故 $T(a,b)=a$.

反之,若 $T(a,b)=a$,则 $a=T(a,b)\leqslant T(1,b)=b$,故 $a\leqslant b$.

同理证明 $a\leqslant b\Leftrightarrow S(a,b)=b$.

定理 3.3.4 设 L 是格,则(L,S,T,N)是吸收模系的充分必要条件是 L 是幂等模系,且

$$T(a,b)=a\wedge b,\quad S(a,b)=a\vee b$$

证明 吸收模系是幂等模系已证.

设 L 是幂等模系. 由于

$$T(a,b)\leqslant T(a,1)=a,\quad T(a,b)\leqslant T(1,b)=b$$

则 $T(a,b)\leqslant a\wedge b$. 又因为 $T(a,a)=a$,则 $a\wedge b=T(a\wedge b,a\wedge b)\leqslant T(a,b)$

故 $T(a,b)=a\wedge b$.

同理证明 $S(a,b)=a\vee b$.

由于 L 关于 $\vee$, $\wedge$ 满足吸收律,则 L 关于 S,T 满足吸收律,所以 L 是吸收模系.

推论 3.3.1 设 L 是格,若$(L,\wedge,\vee)$不是分配模系,则 L 中不存在分配模系.

证明 若 L 中存在分配模系(L,S,T,N),则 L 是吸收模系和幂等模系,在幂等模系中,$S=\vee$,$T=\wedge$,所以$(L,\wedge,\vee)$是分配模系,与假设矛盾,故 L 中不存在分配模系.

推论 3.3.2 设 L 是格,模系(L,S,T,N)是分配模系,等价于 L 是吸收模系,等价于 L 是幂等模系,等价于 L 中的格运算 $\vee=S$, $\wedge=T$.

设 $L=[0,1]$,由于$(L,\vee,\wedge)$满足幂等律、吸收律、分配律,则 L 中不再存在其他满足分配律、吸收律和幂等律的模系.

定义 3.3.2 设(L,S,T,N)是模系,在 $F_L(X)$ 中定义运算 $\Cup$ 和 $\Cap$ 为 $\forall A,B\in F_L(X)$.

(1) $$(A\Cup B)(x)=S(A(x),B(x)) \tag{3.80}$$

(2) $$(A\Cap B)(x)=T(A(x),B(x)) \tag{3.81}$$

(3)
$$A'(x)=N(A(x)) \tag{3.82}$$
则称 $A \uplus B$ 为 A 和 B 的 S 并，$A \Cap B$ 为 A 和 B 的 T 交，A' 为 A 的伪补.

定理 3.3.5　若 (L,S,T,N) 是模系，则 $(F_L(X)\uplus,\Cap,')$ 是模系.

证明　由于运算 $\uplus,\Cap$ 是由 S,T 定义的，所以它们满足模系中的相应性质.

现证"$'$"是伪补和有对偶律.

若 $A\subseteq B$，则 $\forall x\in X, A(x)\leqslant B(x)$，由此
$$B'(x)=N(B(x))\leqslant N(A(x))=A'(x)$$
即 $B'\subseteq A'$，所以"$'$"是逆序映射.
$$(A')'(x)=N(A'(x))=N(N(A(x)))=A(x)$$
即 $(A')'=A$，所以"$'$"是对合对应.

由此"$'$"是 $F_L(X)$ 中的伪补.

最后证明对偶律. $\forall A,B\in F_L(X), x\in X$.
$$\begin{aligned}(A\Cap B)'(x)&=N((A\Cap B)(x))=N(T(A(x),B(x)))=S(N(A(x)),N(B(x)))\\&=S(A'(x),B'(x))=(A'\uplus B')(x)\end{aligned}$$
即 $(A\Cap B)'=A'\uplus B'$.

同理证明 $(A\uplus B)'=A'\Cap B'$. 所以 $(F_L(X),\Cap,\uplus,')$ 是模系.

定理 3.3.6　若 (L,S,T,N) 是分配(吸收，幂等)模系，则 $(F_L(X),\uplus,\Cap,')$ 也是分配(吸收，幂等)模系.

容易验证，从略.

设 L 是完备格，(L,S,T,N) 是模系，若 $a_n\in L(n\in\mathbf{N})$，由于 S 和 T 满足结合律，记
$$\mathop{S}_{i=1}^{n+1}a_i=S((\mathop{S}_{i=1}^{n}a_i),a_{n+1}) \tag{3.83}$$
$$\mathop{T}_{i=1}^{n+1}a_i=T((\mathop{T}_{i=1}^{n}a_i),a_{n+1}) \tag{3.84}$$
令 $S_n=\mathop{S}_{i=1}^{n}a_i, T_n=\mathop{T}_{i=1}^{n}a_i(a\geqslant 2)$，显然
$$a_1=S_1\leqslant S_2\leqslant\cdots \tag{3.85}$$
$$a_1=T_1\geqslant T_2\geqslant\cdots \tag{3.86}$$
定义
$$\mathop{S}_{n=1}^{\infty}a_n=\bigvee_{n=1}^{\infty}S_n \tag{3.87}$$
$$\mathop{T}_{n=1}^{\infty}a_n=\bigwedge_{n=1}^{\infty}T_n \tag{3.88}$$

定理 3.3.7　设 L 是完备格，(L,S,T,N) 是模系，则：

(1) 若 $\exists a_n\in L, a_n=1$，则 $\mathop{S}_{n=1}^{\infty}a_n=1$，若 $\exists a_n\in L, a_n=0$，则 $\mathop{T}_{n=1}^{\infty}a_n=0$.

(2) 若 $\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}=\{a'_n\mid n\in\mathbf{N}\}$，则 $\mathop{S}_{n=1}^{\infty}a'_n=\mathop{S}_{n=1}^{\infty}a_n$，$\mathop{T}_{n=1}^{\infty}a'_n=\mathop{T}_{n=1}^{\infty}a_n$.

(3)
$$N\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} a_n\right) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} N(a_n) \tag{3.89}$$

$$N\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n\right) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} N(a_n) \tag{3.90}$$

证明 (1)因为 $a_n=1$,则 $S_n=1$,故 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\bigvee}} S_n = 1$. 同理,若 $a_n=0$,则

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} a_n = 0.$$

(2)令 $S'_n = \overset{n}{\underset{i=1}{T}} a'_n$,则 $\forall n\in \mathbf{N}$, $\exists m_n \in \mathbf{N}$,使 $\{a'_1, a'_2, \cdots, a'_n\} \subseteq \{a_{m_1}, a_{m_2}, \cdots, a_{m_n}\}$,于是 $S'_n \leqslant S_n$,则有 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a'_n = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\bigvee}} S'_n \leqslant \overset{\infty}{\underset{n=1}{\bigvee}} S_n = \overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n$

同理证明 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n \leqslant \overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a'_n$,所以 $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n = \overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a'_n$.

(3)由于 N 是 L 中的伪补,则

$$\begin{aligned} N\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} a_n\right) &= N\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\bigwedge}} T_n\right) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\bigvee}} N(T_n) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\bigvee}} N\left(\overset{n}{\underset{i=1}{T}} a_i\right) \\ &= \overset{\infty}{\underset{n=1}{\bigvee}} \overset{n}{\underset{i=1}{S}} N(a_i) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\bigvee}} S_n(N(a_i)) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} N(a_n) \end{aligned}$$

同理证明 $N\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} a_n\right) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{T}} N(a_n)$.

设 L 是完备格,(L,S,T,N) 是模系,$\{a_t \mid t\in T\} \subseteq L$,记

$$\underset{t\in T}{S} a_t = \bigvee \{S(a_{t_1}, \cdots, a_{t_n}) \mid t_i \in T, 1\leqslant i \leqslant n, n\in \mathbf{N}\} \tag{3.91}$$

$$\underset{t\in T}{T} a_t = \bigwedge \{T(a_{t_1}, \cdots, a_{t_n}) \mid t_i \in T, 1\leqslant i \leqslant n, n\in \mathbf{N}\} \tag{3.92}$$

设 $\{A_t \mid t\in T\} \subseteq F_L(X)$,记

$$(\underset{t\in T}{\dot{\cup}} A_t)(x) = \underset{t\in T}{S} A_t(x) \tag{3.93}$$

$$(\underset{t\in T}{\dot{\cap}} A_t)(x) = \underset{t\in T}{T} A_t(x) \tag{3.94}$$

分别称为 $\{A_t \mid t\in T\}$ 的无限 S 并和无限 T 交.

定理 3.3.8 设 L 是完备格,(L,S,T,N) 是模系,$\{A_t \mid t\in T\} \subseteq F_L(X)$,则有 $\forall \lambda \in L$.

(1)
$$\left(\underset{t\in T}{\dot{\cup}} A_t\right)_\lambda \supseteq \underset{t\in T}{\cup} (A_t)_\lambda \tag{3.95}$$

(2)
$$\left(\underset{t\in T}{\dot{\cup}} A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \supseteq \underset{t\in T}{\cup} (A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{3.96}$$

(3)
$$\left(\underset{t\in T}{\dot{\cap}} A_t\right)_\lambda \subseteq \underset{t\in T}{\cap} (A_t)_\lambda \tag{3.97}$$

(4)
$$\left(\underset{t\in T}{\dot{\cap}} A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \underset{t\in T}{\cap} (A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{3.98}$$

证明 只证(1)、(3).

(1) $\forall x \in \underset{t\in T}{\cup} (A_t)_\lambda \Rightarrow \exists t_0 \in T, x\in (A_{t_0})_\lambda \Rightarrow \exists t_0 \in T, A_{t_0}(x) \geqslant \lambda$,所以 $\forall t_1 \in T$, $S(A_{t_0}(x), A_{t_1}(x)) \geqslant A_{t_0}(x) \geqslant \lambda$,而

$$\Big(\dot{\bigcup_{t\in T}}A_t\Big)(x)=\underset{t\in T}{S}A_t(x)=\vee\{S(A_{t_1}(x),\cdots,A_{t_n}(x))\mid t_i\in T,i\leqslant n\}\geqslant\lambda$$

故　$x\in\Big(\dot{\bigcup_{t\in T}}A_t\Big)_\lambda$，所以，$\bigcup_{t\in T}(A_t)_\lambda\subseteq\Big(\dot{\bigcup_{t\in T}}A_t\Big)_\lambda$.

(3) $\forall x\in\Big(\dot{\bigcap_{t\in T}}A_t\Big)_\lambda\Rightarrow\Big(\dot{\bigcap_{t\in T}}A_t\Big)(x)\geqslant\lambda\Rightarrow\underset{t\in T}{T}A_t(x)\geqslant\lambda\Rightarrow\wedge\{T(A_{t_1}(x),\cdots,A_{t_n}(x))\mid$ $t_i\in T,1\leqslant i\leqslant n\}\geqslant\lambda\Rightarrow\forall t_i\in T,A_{t_i}(x)\geqslant\lambda\Rightarrow\forall t_i\in T,x\in(A_{t_i})_\lambda\Rightarrow x\in\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda$.

所以 $\Big(\dot{\bigcap_{t\in T}}A_t\Big)_\lambda\subseteq\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda$.

定理 3.3.9　设 L 是完备格，(L,S,T,N) 是模系，若 $\{\alpha_t\mid t\in T\}\subseteq L$，$\alpha=\vee\{\alpha_t\mid t\in T\}$，$\beta=\wedge\{\alpha_t\mid t\in T\}$，$\forall A\in F_L(X)$，则：

(1)
$$A_\alpha\subseteq\bigcap_{t\in T}A\alpha_t\tag{3.99}$$

(2)
$$A_{\underset{\cdot}{\alpha}}\subseteq\bigcap_{t\in T}A\alpha_t\tag{3.100}$$

(3)
$$A_\beta\supseteq\bigcup_{t\in T}A\alpha_t\tag{3.101}$$

(4)
$$A_{\underset{\cdot}{\beta}}\supseteq\bigcup_{t\in T}A\alpha_t\tag{3.102}$$

证明　只证(1)、(3).

(1) $\forall x\in A_\alpha\Rightarrow A(x)\geqslant\alpha\geqslant\alpha_t(t\in T)\Rightarrow\forall t\in T,x\in A\alpha_t\Rightarrow x\in\bigcap_{t\in T}A\alpha_t$ 故

$$A_\alpha\subseteq\bigcap_{t\in T}A\alpha_t.$$

(3) $\forall x\in\bigcup_{t\in T}A\alpha_t\Rightarrow\exists t\in T,x\in A\alpha_t\Rightarrow A(x)\geqslant\alpha_t\geqslant\beta\Rightarrow x\in A_\beta$，故 $A_\beta\supseteq\bigcup_{t\in T}A\alpha_t$.

定理 3.3.10(分解定理)　设 L 是完备格，(L,S,T,N) 是模系，$\forall A\in F_L(X)$，有 $\forall x\in X$.

$$A(x)=\bigvee_{\lambda\in L}T(\lambda,A_\lambda(x))\tag{3.103}$$

其中 $A_\lambda(x)$ 是 A_λ 的特征函数.

证明　$\bigvee_{\lambda\in L}T(\lambda,A_\lambda(x))=\bigvee_{A(x)\geqslant\lambda}T(\lambda,A_\lambda(x))=\bigvee_{A(x)\geqslant\lambda}\lambda=A(x)$. 所以

$$A(x)=\bigvee_{\lambda\in L}T(\lambda,A_\lambda(x)).$$

§3.4　L 型模糊集的模扩张运算

设 $(X,\leqslant)$ 是半序集，$A\in F_L(X)$，若存在 $x_0\in X$ 使 $A(x_0)=1$，则称 A 是正则模糊集. 下面假定用 $F_L(X)$ 表示正则 L 型模糊集的全体.

定义 3.4.1　设 $A,B\in F_L(X)$，若满足：$\forall\lambda\in L$，

(1) $\forall x_0\in A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，$\exists y_0\in B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 使
$$x_0\leqslant y_0\tag{3.104}$$

(2) $\forall y_1\in B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，$\exists x_1\in A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 使
$$x_1\leqslant y_1\tag{3.105}$$

则称 A 弱于 B，记为 $A\lesssim B$.

显然，$(X,\leqslant)$ 是半序集，则 $(F_L(X),\lesssim)$ 也是半序集，但 $(X,\leqslant)$ 是偏序集，$(F_L(X),\lesssim)$ 是半序集，未必是偏序集. 因为反对称性不一定成立.

设(X,S,T,N)是模系，L是完备格，在$(F_L(X),\leqslant)$中引入运算：$\forall A,B\in F_L(X)$，$x\in X$，

(1) $$(ASB)(x)=\bigvee_{\lambda\in L}(\lambda\wedge S(A_{\dot\lambda},B_{\dot\lambda})(x))\tag{3.106}$$

(2) $$(ATB)(x)=\bigvee_{\lambda\in L}(\lambda\wedge T(A_{\dot\lambda},B_{\dot\lambda})(x))\tag{3.107}$$

(3) $$A'(x)=A(N(x))\tag{3.108}$$

其中$S(A_{\dot\lambda},B_{\dot\lambda})=\{S(x,y)\mid x\in A_{\dot\lambda},y\in B_{\dot\lambda}\}$，$T(A_{\dot\lambda},B_{\dot\lambda})=\{T(x,y)\mid x\in A_{\dot\lambda},y\in B_{\dot\lambda}\}$，$S(A_{\dot\lambda},B_{\dot\lambda})(x)$，$T(A_{\dot\lambda},B_{\dot\lambda})(x)$分别表示$S(A_{\dot\lambda},B_{\dot\lambda})$，$T(A_{\dot\lambda},B_{\dot\lambda})$的特征函数值.

显然，$ASB,ATB,A'\in F_L(X)$.

定理 3.4.1 设(X,S,T,N)是模系，L是稠密的完备格，则$\forall A,B\in F_L(X)$，有

(1) $$(ASB)_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})\tag{3.109}$$

(2) $$(ASB)_{\dot\lambda}=\bigcup_{\alpha>\lambda}S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})\tag{3.110}$$

(3) $$(ATB)_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}T(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})\tag{3.111}$$

(4) $$(ATB)_{\dot\lambda}=\bigcup_{\alpha>\lambda}T(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})\tag{3.112}$$

证明 只证(1)、(4).

(1)设$x\in\bigcap_{\alpha<\lambda}S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})$，则$\forall\alpha<\lambda$，$x\in S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})$故

$$(ASB)(x)=\bigvee_{\alpha\in L}(\alpha\wedge S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})(x))=\bigvee\{\alpha\in L\mid x\in S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})\}\geqslant\lambda$$

从而 $x\in(ASB)_\lambda$，即$\bigcap_{\alpha<\lambda}S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})\subseteq(ASB)_\lambda$.

若$x\in(ASB)_\lambda$，则$(ASB)(x)\geqslant\lambda$，即

$$(ASB)(x)=\bigvee_{\alpha\in L}(\alpha\wedge S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})(x))=\bigvee\{\alpha\in L\mid x\in S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})\}\geqslant\lambda$$

令
$$\bigvee\{\alpha\in L\mid x\in S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})\}=\delta\geqslant\lambda$$

由于L是稠密的完备格，则$\forall\beta<\delta$，$\exists\alpha\in L$，使$\beta<\alpha<\delta$，且$x\in S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})$，从而$x\in\bigcap_{\alpha<\delta}S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})$，故$x\in\bigcap_{\alpha<\lambda}S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})$，即$(ASB)_\lambda\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})$，所以

$$(ASB)_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}S(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha}).$$

(4)设$x\in\bigcup_{\alpha>\lambda}T(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})$，则$\exists\alpha>\lambda$，$x\in T(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})$，故

$$(ATB)(x)=\bigvee_{\alpha\in L}(\alpha\wedge T(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})(x))=\bigvee\{\alpha\in L\mid x\in T(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})\}>\lambda$$

故$x\in(ATB)_{\dot\lambda}$，即$\bigcup_{\lambda>\alpha}T(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})\subseteq(ATB)_{\dot\lambda}$.

若$x\in(ATB)_{\dot\lambda}$，则$(ATB)(x)>\lambda$，即

$$(ATB)(x)=\bigvee_{\alpha\in L}(\alpha\wedge T(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})(x))=\bigvee\{\alpha\in L\mid x\in T(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})\}>\lambda$$

故$\exists\alpha>\lambda$，$x\in T(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})$，则$x\in\bigcup_{\alpha>\lambda}T(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})$，即$(ATB)_{\dot\lambda}\subseteq\bigcup_{\alpha>\lambda}T(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})$.

所以$(ATB)_{\dot\lambda}=\bigcup_{\alpha>\lambda}T(A_{\dot\alpha},B_{\dot\alpha})$.

设(X,S,T,N)是模系，记

$$1(x)=\begin{cases}1, & x=I\\0, & x\neq I\end{cases} \tag{3.113}$$

$$O(x)=\begin{cases}1, & x=Q\\0, & x\neq Q\end{cases} \tag{3.114}$$

其中 I,Q 分别是 X 中的最大元和最小元，则 $1,0\in F_L(X)$.

定理 3.4.2 设 L 是稠密的完备格，若 (X,S,T,N) 是模系，则 $(F_L(X),S,T,')$ 是模系.

证明 (1)首先证明同一律和两极律成立. 因为

$S(A_{\underset{\cdot}{\alpha}},0_{\underset{\cdot}{\alpha}})=\{S(x,y)\mid x\in A_{\underset{\cdot}{\alpha}},y\in 0_{\underset{\cdot}{\alpha}}\}=\{S(x,Q)\mid x\in A_{\underset{\cdot}{\alpha}}\}=\{x\mid x\in A_{\underset{\cdot}{\alpha}}\}=A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$

故 $$(ASO)(x)=\bigvee_{\alpha\in L}(\alpha\wedge S(A_{\underset{\cdot}{\alpha}},O_{\underset{\cdot}{\alpha}})(x))=\bigvee_{\alpha\in L}\alpha\wedge A_{\underset{\cdot}{\alpha}}(x)=A(x)$$

即 $ASO=A$.

同理 $AT1=A,AS1=1,ATO=O$.

(2)由式(3.106)和式(3.107)知交换律 $ASB=BSA,ATB=BTA$ 成立.

(3)现证单调性，即证 $A\leq C,B\leq D$，则 $ASB\leq CSD,ATB\leq CTD$.

设 $z\in(ASB)_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，则 $(ASB)(z)=\bigvee_{\lambda\in L}\{\lambda\mid z\in S(A_{\underset{\cdot}{\lambda}},B_{\underset{\cdot}{\lambda}})\}\triangleq\delta>\alpha$，由稠密性知 $\exists\lambda\in L,\alpha<\lambda<\delta,z\in S(A_{\underset{\cdot}{\lambda}},B_{\underset{\cdot}{\lambda}})$，于是 $\exists x\in A_{\underset{\cdot}{\lambda}},y\in B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，使得 $z=S(x,y)$. 由假定 $A\leq C,B\leq D$，则 $\exists x'\in C_{\underset{\cdot}{\lambda}},y'\in D_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，使 $x\leqslant x',y\leqslant y'$，从而 $z=S(x,y)\leqslant S(x',y')\triangleq z'\in S(C_{\underset{\cdot}{\lambda}},D_{\underset{\cdot}{\lambda}})$，则 $(CSD)(z')=\bigvee_{\lambda\in L}\{\lambda\mid z'\in S(C_{\underset{\cdot}{\lambda}},D_{\underset{\cdot}{\lambda}})\}>\alpha$.

故 $z'\in(CSD)_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，即证明了 $\forall z\in(ASB)_{\underset{\cdot}{\alpha}},\exists z'\in(CSD)_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，使 $z\leqslant z'$.

同理 $\forall z'\in(CSD)_{\underset{\cdot}{\alpha}},\exists z\in(ASB)_{\underset{\cdot}{\alpha}}$；使 $z\leqslant z'$，所以 $ASB\leq CSD$.

同理可证 $ATB\leq CTD$.

(4)证明结合律成立.

由 L 的稠密性及式(3.110)得

$$\begin{aligned}((ASB)SC)_{\underset{\cdot}{\alpha}}&=\bigcup_{\lambda>\alpha}S((ASB))_{\underset{\cdot}{\lambda}},C_{\underset{\cdot}{\lambda}})=\bigcup_{\lambda>\alpha}S(\bigcup_{\beta>\lambda}S(A_{\underset{\cdot}{\beta}},B_{\underset{\cdot}{\beta}}),C_{\underset{\cdot}{\lambda}})\\&=\bigcup_{\beta>\lambda>\alpha}S(S(A_{\underset{\cdot}{\beta}},B_{\underset{\cdot}{\beta}}),C_{\underset{\cdot}{\lambda}})=\bigcup_{\beta>\lambda>\alpha}S(A_{\underset{\cdot}{\lambda}},S(B_{\underset{\cdot}{\beta}},C_{\underset{\cdot}{\beta}}))\\&=\bigcup_{\lambda>\alpha}S(A_{\underset{\cdot}{\lambda}},\bigcup_{\beta>\lambda}S(B_{\underset{\cdot}{\beta}},C_{\underset{\cdot}{\beta}}))=\bigcup_{\lambda>\alpha}S(A_{\underset{\cdot}{\lambda}},(S(B,C))_{\underset{\cdot}{\lambda}})\\&=(AS(BSC))_{\underset{\cdot}{\alpha}}.\end{aligned}$$

所以，$(ASB)SC=AS(BSC)$.

同理证明 $(ATB)TC=AT(BTC)$.

(5)证明"$'$"是伪补.

因为 $(A')'(x)=A'(N(x))=A(N(N(x)))=A(x)$，故 $(A')'=A$.

若 $A\leq B$，现证 $B'\leq A'$. $\forall x\in(A')\alpha$，则 $A'(x)>\alpha$，即 $A(N(x))>\alpha$，故 $N(x)\in A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，由 $A\leq B$ 知，$\exists y\in B_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，使 $N(x)\leqslant y$，从而 $N(y)\leqslant N(N(x))=x$，而且由 $y\in B_{\underset{\cdot}{\alpha}}$

知 $N(y)\in(B')_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，即证明了 $\forall x\in(A')_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，$\exists N(y)\in(B')_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，使 $N(y)\leqslant x$.

同理证明 $\forall y\in(B')_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，$\exists N(x)\in(A')_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，使 $y\leqslant N(x)$.

于是 $B'\lesssim A'$，所以“′”是 $F_L(X)$ 中的伪补.

(6) 证明对偶律成立.

由于 $z\in T((A')_{\underset{\cdot}{\alpha}}(B')_{\underset{\cdot}{\alpha}})\Leftrightarrow\exists x\in(A')_{\underset{\cdot}{\alpha}},y\in(B')_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，使得 $z=T(x,y)\Leftrightarrow\exists N(x)\in A_{\underset{\cdot}{\alpha}},N(y)\in B_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，使得 $N(z)=N(T(x,y))=S(N(x),N(y))\Leftrightarrow N(z)\in S(A_{\underset{\cdot}{\alpha}},B_{\underset{\cdot}{\alpha}})$. 而

$$(ASB)(N(z))=\bigvee_{\alpha\in L}\{\alpha\mid N(z)\in S(A_{\underset{\cdot}{\alpha}},B_{\underset{\cdot}{\alpha}})\}$$

$$(A'TB')(z)=\bigvee_{\alpha\in L}\{\alpha\mid z\in T((A')_{\underset{\cdot}{\alpha}},(B')_{\underset{\cdot}{\alpha}})\}$$

故
$$(ASB)'(z)=(ASB)(N(z))=(A'TB')(z)$$

所以 $(ASB)'=A'TB'$.

同理证明 $(ATB)'=A'SB'$.

于是 $(F_L(X),S,T,')$ 是模系.

习 题 3

1. 设 L 是格，$A,B\in F_L(X)$，$\forall\lambda\in L$，证明：

(1) $(A\cup B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\supseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$； (2) $(A\cap B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cap B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

2. 设 L 是完备格，$\{A_t\mid t\in T\}\subseteq F_L(X)$，$\forall\lambda\in L$，证明：

(1) $\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)_\lambda\supseteq\bigcup_{t\in T}(A_t)_\lambda$； (2) $\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)_\lambda=\bigcap_{t\in T}(A_t)_\lambda$；

(3) $\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\supseteq\bigcup_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$； (4) $\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq\bigcap_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

若 L 是稠密的完备格，则(3)的等号成立.

3. 设 L 是完备格，$A\in F_L(X)$，证明 $\forall\lambda\in L$，

(1) $A_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}A_\alpha$； (2) $A_\lambda\supseteq\bigcup_{\alpha>\lambda}A_\alpha$；

(3) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$； (4) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\supseteq\bigcup_{\alpha>\lambda}A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$.

若 L 是稠密的完备格，则(4)的等号成立.

4. 设 L 是完备格，$H\in H_L(X)$，$F_H(\lambda)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)$，记

$$A(x)=\bigwedge_{\lambda\in L}(\lambda\wedge F_H(\lambda)(x))\quad(x\in X)$$

证明 $A_\lambda=F_H(\lambda)$.

5. 设 L 是稠密的完备格，$\forall H\in H_L(X)$，记 $f(H)=\bigcup_{\lambda\in L}\lambda H(\lambda)$，证明 f 是 $H_L(X)$ 到 $F_L(X)$ 的满同态，且

(1) $(f(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)\subseteq(f(H))_\lambda$； (2) $(f(H))_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\lambda)=F_H(\lambda)$；

(3) $(f(H))_{\lambda} = \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha) = F_H(\lambda)$.

6. 设 L 是完备格，(L,S,T,N) 是模系，证明：

(1) 若 $\exists t_0 \in T, a_{t_0} = 1$，则 $\underset{t\in T}{S} a_t = 1$；

(2) 若 $\exists t_0 \in T, a_{t_0} = 0$，则 $\underset{t\in T}{T} a_t = 0$；

(3) 若 $\{a'_t\}_{t\in T} = \{a_t\}_{t\in T}$，则 $\underset{t\in T}{S} a'_t = \underset{t\in T}{S} a_t$，$\underset{t\in T}{T} a'_t = \underset{t\in T}{T} a_t$；

(4) $N\left(\underset{t\in T}{T} a_t\right) = \underset{t\in T}{S} N(a_t)$，$N\left(\underset{t\in T}{S} a_t\right) = \underset{t\in T}{T} N(a_t)$，其中 $\{a_t \mid t\in T\} \subseteq L$.

7. 设 L 是完备格，(L,S,T,N) 是模系，若

$$\{a_t \mid t\in T\} \subseteq L, \alpha = \bigvee \{a_t \mid t\in T\}, \beta = \bigwedge \{\beta_t \mid t\in T\}, \forall A \in F_L(X)$$

证明：

(1) $A_{\alpha} \subseteq \bigcap_{t\in T} A_{\alpha_t}$；　(2) $A_{\beta} \supseteq \bigcup_{t\in T} A_{\beta_t}$.

第4章 模糊关系

§4.1 模糊关系

定义 4.1.1 设 X,Y 是论域,笛卡儿积 $X\times Y$ 的一个模糊子集称为 X 到 Y 的一个模糊关系,简称为 F 关系,记为 R,即 $R\in F(X\times Y)$.

特别地,$X=Y$,则 F 关系 R 称为 X 中的 F 关系,即 $R\in F(X\times X)$.

例 4.1.1 实数集 **R** 上的 x 远远小于 y 的 F 关系 R 为

$$R(x,y)=\begin{cases}0, & x\geqslant y\\ \left[1+\dfrac{100}{(y-x)^2}\right]^{-1}, & x<y\end{cases}$$

特别地,若 X 和 Y 为有限论域,则 X 到 Y 的一个 F 关系可以记为一个矩阵 $\boldsymbol{R}$.

例 4.1.2 设身高论域 $X=\{140,150,160,170,180\}$,单位是厘米(cm). 体重论域 $Y=\{40,50,60,70,80\}$,单位是公斤(kg). 身高和体重之间接近标准体重的模糊关系可以写为一个表,如表 4.1.1 所示. 从而可以记为一个模糊矩阵.

表 4.1.1

身高 \ 体重	40	50	60	70	80
140	1	0.8	0.5	0.2	0
150	0.8	1	0.8	0.5	0.2
160	0.5	0.8	1	0.8	0.5
170	0.2	0.5	0.8	1	0.8
180	0	0.2	0.5	0.8	1

写成矩阵形式

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 & 0\\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2\\ 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.5\\ 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8\\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1\end{pmatrix}.$$

定义 4.1.2 设 X 和 Y 是有限论域,则称 X 到 Y 的一个模糊关系 $\boldsymbol{R}$ 为一个模糊矩阵.简称 F 矩阵,即

$$\boldsymbol{R}: X \times Y \to [0,1] \tag{4.1}$$

若 $\boldsymbol{X} = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$,$\boldsymbol{Y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$,则 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{m \times n}$是 m 行 n 列矩阵,且 $\forall 1 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant n$,

$$r_{ij} = \boldsymbol{R}(x_i, y_j)$$

显然,$0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1$,$r_{ij}$表示 x_i 和 y_j 关于 $\boldsymbol{R}$ 的关系程度.

定义 4.1.3 设 $R, S \in F(X \times Y)$,定义

(1)$R \subseteq S$ 当且仅当 $\forall (x,y) \in X \times Y$,

$$R(x,y) \leqslant S(x,y) \tag{4.2}$$

(2)$R = S$ 当且仅当 $\forall (x,y) \in X \times Y$,

$$R(x,y) = S(x,y) \tag{4.3}$$

定义 4.1.4 设 $R, S \in F(X \times Y)$,定义

(1) $$(R \cup S)(x,y) = R(x,y) \vee S(x,y) \tag{4.4}$$

(2) $$(R \cap S)(x,y) = R(x,y) \wedge S(x,y) \tag{4.5}$$

(3) $$R'(x,y) = 1 - R(x,y) \tag{4.6}$$

分别称为 R 和 S 的并关系,交关系和 R 的余关系.

一般地,$\{R_t \mid t \in T\} \subseteq F(X \times Y)$,则定义

$$\left(\bigcup_{t \in T} R_t\right)(x,y) = \bigvee_{t \in T} R_t(x,y) \tag{4.7}$$

$$\left(\bigcap_{t \in T} R_t\right)(x,y) = \bigwedge_{t \in T} R_t(x,y) \tag{4.8}$$

容易验证$(F(X \times Y), \vee, \wedge, ')$是软代数系统.

定义 4.1.5 设 $R \in F(X \times Y)$,$\forall (x,y) \in X \times Y$,记

$$R^{-1}(y,x) = R(x,y) \tag{4.9}$$

则称 R^{-1}为 R 的逆关系,或称为转置关系.

定理 4.1.1 设 $R, S \in F(X \times Y)$,则:

(1) $$R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1} \tag{4.10}$$

(2) $$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} \tag{4.11}$$

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \tag{4.12}$$

(3) $$(R')^{-1} = (R^{-1})' \tag{4.13}$$

(4) $$(R^{-1})^{-1} = R \tag{4.14}$$

证明 只证(2),其他显然.

(2) $$\begin{aligned}(R \cup S)^{-1}(y,x) &= (R \cup S)(x,y) = R(x,y) \vee S(x,y) \\ &= R^{-1}(y,x) \vee S^{-1}(y,x) = (R^{-1} \cup S^{-1})(y,x)\end{aligned}$$

故$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

同理证明$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

一般地，$\{R_t \mid t\in T\}\subseteq F(X\times Y)$.

(5) $$\left(\bigcup_{t\in T}R_t\right)^{-1}=\bigcup_{t\in T}R_t^{-1} \tag{4.15}$$

(6) $$\left(\bigcap_{t\in T}R_t\right)^{-1}=\bigcap_{t\in T}R_t^{-1} \tag{4.16}$$

特别地，$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$　$\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{m\times n}$是模糊矩阵，则

(1) $$\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{S}\Leftrightarrow\forall i,j,r_{ij}\leqslant s_{ij} \tag{4.17}$$

(2) $$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}\Leftrightarrow\forall i,j,r_{ij}=s_{ij} \tag{4.18}$$

(3) $$\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}=(r_{ij}\vee S_{ij})_{m\times n} \tag{4.19}$$

(4) $$\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S}=(r_{ij}\wedge S_{ij})_{m\times n} \tag{4.20}$$

(5) $$\boldsymbol{R}'=(1-r_{ij})_{m\times n} \tag{4.21}$$

(6) $$\boldsymbol{R}^{-1}=(r_{ji}^{*})_{m\times n} \tag{4.22}$$

其中 $r_{ji}^{*}=r_{ij}$.

例 4.1.3　设 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.3\\0.1 & 0.7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.3\\0.1 & 0.6\end{pmatrix}$，则

(1)$\boldsymbol{R}\not\subseteq\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}\subseteq\boldsymbol{R}$；　(2)$\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.3\\0.1 & 0.7\end{pmatrix}$；　(3)$\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.3\\0.1 & 0.6\end{pmatrix}$；

(4)$\boldsymbol{R}'=\begin{pmatrix}0.8 & 0.7\\0.9 & 0.3\end{pmatrix}$；　(5)$\boldsymbol{R}^{-1}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1\\0.3 & 0.7\end{pmatrix}$.

定义 4.1.6　设 $R\in F(X\times Y)$，$\forall\lambda\in[0,1]$，记

(1) $$R_\lambda=\{(x,y)\in X\times Y\mid R(x,y)\geqslant\lambda\} \tag{4.23}$$

(2) $$R_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\{(x,y)\in X\times Y\mid R(x,y)>\lambda\} \tag{4.24}$$

则称 R_λ 为 R 的 λ 截集，称 $R_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 为 R 的 λ 强截集.

定理 4.1.2(分解定理)　设 $R\in F(X\times Y)$，则

(1) $$R=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda R_\lambda \tag{4.25}$$

(2) $$R=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda R_{\underset{\cdot}{\lambda}} \tag{4.26}$$

(3) $$R=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H_R(\lambda) \tag{4.27}$$

其中 $H_R:[0,1]\to P(X\times Y)$ 且 $\forall\lambda\in[0,1]$，$R_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)\subseteq R_\lambda$.

定义 4.1.7　设 $R\in F(X\times Y)$，$S\in F(Y\times Z)$，定义一个 X 到 Z 的 F 关系 $R\circ S$ 为：$\forall x\in X,z\in Z$

$$(R\circ S)(x,z)=\bigvee_{y\in Y}(R(x,y)\wedge S(y,z)) \tag{4.28}$$

则称 $R\circ S$ 为 R 和 S 的合成关系，或称为 R 和 S 的乘积.

定理 4.1.3　设 $R,R_1,R_2\in F(X\times Y)$，$S,S_1,S_2\in F(Y\times Z)$，$Q\in F(Z\times W)$，则：

(1) $$(R\circ S)\circ Q=R\circ(S\circ Q) \tag{4.29}$$

(2) $$R\circ(S_1\cup S_2)=R\circ S_1\cup R\circ S_2 \tag{4.30}$$

$$(R_1\cup R_2)\circ S=R_1\circ S\cup R_2\circ S \tag{4.31}$$

(3) $$(R_1 \cap R_2) \circ S \subseteq R_1 \circ S \cap R_2 \circ S \tag{4.32}$$

$$R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq R \circ S_1 \cap R \circ S_2 \tag{4.33}$$

(4) 若 $R_1 \subseteq R_2$,则 $$R_1 \circ S \subseteq R_2 \circ S \tag{4.34}$$

若 $S_1 \subseteq S_2$,则 $$R \circ S_1 \subseteq R \circ S_2 \tag{4.35}$$

(5) $$R \circ I_Y = I_X \circ R = R \tag{4.36}$$

$$R \circ O_Y = O_X \circ R = O \tag{4.37}$$

(6) $$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} \tag{4.38}$$

其中, $\forall x,y \in X$

$$I_X(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

$$O_X(x,y) = 0$$

证明 只证(1),(2),(6).

(1) $\forall (x,w) \in X \times W$

$$\begin{aligned}((R \circ S) \circ Q)(x,w) &= \bigvee_{z \in Z} ((R \circ S)(x,z) \wedge Q(z,w)) \\ &= \bigvee_{z \in Z} ((\bigvee_{y \in Y} R(x,y) \wedge S(y,z)) \wedge Q(z,w)) \\ &= \bigvee_{z \in Z} \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge S(y,z) \wedge Q(z,w)) \\ &= \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge (\bigvee_{z \in Z} (S(y,z) \wedge Q(z,w)))) \\ &= \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge (S \circ Q)(y,w)) = R \circ (S \circ Q)(x,w)\end{aligned}$$

所以 $$(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q).$$

(2) $\forall (x,z) \in X \times Z$

$$\begin{aligned}(R \circ (S_1 \cup S_2))(x,z) &= \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge (S_1 \cup S_2)(y,z)) \\ &= \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge (S_1(y,z) \vee S_2(y,z))) \\ &= \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge (S_1(y,z)) \vee (R(x,y) \wedge S_2(y,z)) \\ &= (\bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge (S_1(y,z))) \vee (\bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge S_2(y,z)) \\ &= (R \circ S_1)(x,z) \vee (R \circ S_2)(x,z) \\ &= ((R \circ S_1) \cup (R \circ S_2))(x,z)\end{aligned}$$

所以 $$R \circ (S_1 \cup S_2) = R \circ S_1 \cup R \circ S_2$$

同理证明 $(R_1 \cup R_2) \circ S = R_1 \circ S \cup R_2 \circ S$.

(6) $\forall (x,z) \in X \times Z$

$$\begin{aligned}(R \circ S)^{-1}(z,x) &= (R \circ S)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} R(x,y) \wedge S(y,z) \\ &= \bigvee_{y \in Y} S^{-1}(z,y) \wedge R^{-1}(y,x) = (S^{-1} \circ R^{-1})(z,x)\end{aligned}$$

所以 $$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

一般地，$R \in F(X \times Y)$，$\{R_t \mid t \in T\} \subseteq F(X \times Y)$，$S \in F(Y \times Z)$，$\{S_t \mid t \in T\} \subseteq F(Y \times Z)$，则：

(7)
$$R \circ \left(\bigcup_{t \in T} S_t\right) = \bigcup_{t \in T} R \circ S_t \tag{4.39}$$

(8)
$$\left(\bigcup_{t \in T} R_t\right) \circ S = \bigcup_{t \in T} R_t \circ S \tag{4.40}$$

特别地，$R = (r_{ij})_{m \times l}$. $S = (s_{ij})_{l \times n}$是模糊矩阵，则

$$R \circ S = (t_{ij})_{m \times n} = T \tag{4.41}$$

其中 $t_{ij} = \bigvee_{k=1} (r_{ik} \wedge s_{kj})$.

例 4.1.4 设 $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

一般地，$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}$.

例 4.1.5 设 $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$，则

$$(\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}) \circ \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

从而
$$(\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{S}) \circ \boldsymbol{Q} \neq (\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{Q}) \cap (\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{Q}).$$

定义 4.1.8 设 $R \in F(X \times X)$，记

$$R^0 = I_X, \quad R^1 = R, \quad R^2 = R \circ R, \cdots, R^n = R^{n-1} \circ R, \cdots$$

则称 R^n 为 R 的 n 次幂.

定理 4.1.4 设 $R, S \in F(X \times X)$，则：

(1) 若 $R \subseteq S$，则 $\forall n \in \mathbf{N}, R^n \subseteq S^n$.

(2)
$$R^k \circ R^l = R^{k+l} \tag{4.42}$$

(3) 若 $R \circ S = S \circ R$，则 $(R \circ S)^n = R^n \circ S^n$.

(4)
$$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n \tag{4.43}$$

证明 (1)，(2)，(4)由定理 4.1.3 直接可得.

(3)由归纳法得 $(R \circ S)^1 = R^1 \circ S^1$，设 $(R \circ S)^{k-1} = R^{k-1} \circ S^{k-1}$，则

$$\begin{aligned}(R \circ S)^k &= (R \circ S)^{k-1} \circ (R \circ S) = R^{k-1} \circ S^{k-1} \circ R \circ S \\ &= R^{k-1} \circ S^{k-1} \circ S \circ R = R^{k-1} \circ S^k \circ R = R^{k-1} \circ R \circ S^k = R^k \circ S^k\end{aligned}$$

一般地，$(R \circ S)^n \neq R^n \circ S^n$.

例 4.1.6 设 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2\\0.6 & 0.4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.7\\0.5 & 0.8\end{pmatrix}$，则

$$(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})^2=\begin{pmatrix}0.2 & 0.2\\0.4 & 0.6\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0.2 & 0.2\\0.4 & 0.6\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^2\circ\boldsymbol{S}^2=\begin{pmatrix}0.2 & 0.2\\0.4 & 0.4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.5 & 0.7\\0.5 & 0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.2\\0.4 & 0.4\end{pmatrix}$$

所以

$$(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})^2\neq\boldsymbol{R}^2\circ\boldsymbol{S}^2.$$

§4.2 模糊关系的性质

定义 4.2.1 设 $R\in F(X\times X)$.

(1)若 $\forall x\in X, R(x,x)=1$，即 $I_X\subseteq R$，则称 R 是 X 上的 F 自反关系；

(2)若 $\forall x,y\in X, R(x,y)=R(y,x)$，即 $R^{-1}=R$，则称 R 是 X 上的 F 对称关系；

(3)若 $R\circ R\subseteq R$，则称 R 是 X 上的 F 传递关系.

定理 4.2.1 设 $\{R_t\mid t\in T\}\subseteq F(X\times X)$，则：

(1)若 $\forall t\in T, R_t$ 是 F 自反关系，则 $\bigcup\limits_{t\in T}R_t, \bigcap\limits_{t\in T}R_t$ 是 F 自反关系；

(2)若 $\forall t\in T, R_t$ 是 F 对称关系，则 $\bigcup\limits_{t\in T}R_t, \bigcap\limits_{t\in T}R_t$ 是 F 对称关系；

(3)若 $\forall t\in T, R_t$ 是 F 传递关系，则 $\bigcap\limits_{t\in T}R_t$ 是 F 传递关系.

证明 (1)因 $\forall t\in T, R_t$ 是 F 自反，则 $\forall t\in T, I_X\subseteq R_t$，从而

$$I_X\subseteq\bigcup_{t\in T}R_t,\quad I_X\subseteq\bigcap_{t\in T}R_t.$$

所以 $\bigcup\limits_{t\in T}R_t, \bigcap\limits_{t\in T}R_t$ 是 F 自反关系.

(2)因 $\forall t\in T, R_t$ 是 F 对称的，则 $\forall t\in T, R_t^{-1}=R_t$，从而

$$\left(\bigcup_{t\in T}R_t\right)^{-1}=\bigcup_{t\in T}R_t^{-1}=\bigcup_{t\in T}R_t$$

$$\left(\bigcap_{t\in T}R_t\right)^{-1}=\bigcap_{t\in T}R_t^{-1}=\bigcap_{t\in T}R_t$$

所以 $\bigcup\limits_{t\in T}R_t, \bigcap\limits_{t\in T}R_t$ 是 F 对称关系.

(3)因 $\forall t\in T$

$$\left(\bigcap_{t\in T}R_t\right)^2=\left(\bigcap_{t\in T}R_t\right)\circ\left(\bigcap_{t\in T}R_t\right)\subseteq R_t\circ R_t\subseteq R_t$$

从而 $\left(\bigcap\limits_{t\in T}R_t\right)^2\subseteq\bigcap\limits_{t\in T}R_t$，所以 $\bigcap\limits_{t\in T}R_t$ 是 F 传递关系.

一般情况下，若 R,S 是 X 上的 F 传递关系，但 $R\cup S$ 不一定是 X 上的 F 传递关系.

例 4.2.1 设 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1\\0.2 & 0.3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2\\0 & 0.3\end{pmatrix}$.

因 $\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}^2=\boldsymbol{S}$，故 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 是传递关系，但是

$$\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0.3\end{pmatrix},\quad (\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S})^2=\begin{pmatrix}0.2 & 0.2\\ 0.2 & 0.3\end{pmatrix}$$

即$(\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S})^2\not\subseteq\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}$,所以$\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}$不是传递关系.

定理 4.2.2 设$R\in F(X\times X)$,若R是F自反关系,则$R^n\subseteq R^{n+1}$.

证明 因为

$$R^2(x,y)=\bigvee_{z\in X}(R(x,z)\wedge R(z,y))\geqslant R(x,x)\wedge R(x,y)=R(x,y),$$

即 $$R\subseteq R^2.$$

由此 $$R^2=R\circ R\subseteq R^2\circ R=R^3,\cdots$$

从而 $$R^n=R^{n-1}\circ R\subseteq R^n\circ R=R^{n+1}$$

所以 $$R^n\subseteq R^{n+1}.$$

定理 4.2.3 设$R,S\in F(X\times X)$,若R,S是F自反关系,则$R\circ S$是F自反关系.

证明 因为

$$(R\circ S)(x,y)=\bigvee_{z\in X}(R(x,z)\wedge S(z,y))\geqslant R(x,y)\wedge S(y,y)=R(x,y)$$

即$R\subseteq R\circ S$,从而,$I_X\subseteq R\subseteq R\circ S$,所以$R\circ S$是$F$自反的.

推论 4.2.1 若R是X上的F自反关系,则R^n也是X上的F自反关系.

定理 4.2.4 设$R,S\in F(X\times X)$,若R和S是F对称关系,则

$$R\circ S\text{是}F\text{对称}\Leftrightarrow R\circ S=S\circ R.$$

证明 设$R\circ S$是F对称,则$R\circ S=(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}=S\circ R$.

反之,设$R\circ S=S\circ R$,则

$$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}=S\circ R=R\circ S$$

所以$R\circ S$是F对称关系.

推论 4.2.2 若R是X上的F对称关系,则$R\circ R^{-1}$也是X上的F对称关系.

推论 4.2.3 若R是X上的F对称关系,则R^n也是X上的F对称关系.

定理 4.2.5 设$R,S\in F(X\times X)$是X上F传递关系,且$R\circ S=S\circ R$,则$R\circ S$是X上的F传递关系.

证明 因为

$$(R\circ S)^2=(R\circ S)\circ(R\circ S)=R\circ R\circ S\circ S=R^2\circ S^2\subseteq R\circ S$$

故$R\circ S$是X上的F传递关系.

推论 4.2.4 若R是X上的F传递关系,则R^n也是X上的F传递关系.

定义 4.2.2 设$R\in F(X\times X)$,记

$$t(R)=\cap\{S\in F(X\times X)\mid R\subseteq S,\text{且 }S^2\subseteq S\}\tag{4.44}$$

则称$t(R)$是F关系R的传递闭包.

显然,$t(R)$是X上包含R的最小的F传递关系.

定理 4.2.6 设$R\in F(X\times X)$,则

$$t(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n \tag{4.45}$$

证明 因为 $R\subseteq t(R)$，则 $R^n\subseteq(t(R))^n$，由于 $t(R)$ 是 F 传递的，即

$$(t(R))^2\subseteq t(R)$$

从而 $(t(R))^n\subseteq(t(R))^{n-1}\subseteq\cdots\subseteq t(R)$，于是 $\forall n\in\mathbf{N},R^n\subseteq t(R)$，所以

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n\subseteq t(R).$$

反之，因为

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n)\circ(\bigcup_{m=1}^{\infty}R^m)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}(R^n\circ R^m)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}R^{n+m}=\bigcup_{k=2}^{\infty}\bigcup_{n+m=k}^{\infty}R^k\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k$$

所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$ 是 F 传递关系.

又因为 $R\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$，且 $t(R)$ 是包含 R 的最小传递关系，所以 $t(R)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$. 由此 $t(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$.

定理 4.2.7 设 $R\in F(X\times X)$，则：

(1) 若 $R\subseteq S$，则 $t(R)\subseteq t(S)$；

(2) 若 R 是 F 自反关系，则 $t(R)$ 是 F 自反关系；

(3) 若 R 是 F 对称关系，则 $t(R)$ 是 F 对称关系；

(4) 若 R 是 F 传递关系，则 $t(R)=R$；

(5)
$$(t(R))^{-1}=t(R^{-1}) \tag{4.46}$$

证明 (1) 由于 $R\subseteq S$，则 $R^n\subseteq S^n$，故 $t(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}S^n=t(S)$，即

$$t(R)\subseteq t(S).$$

(2) 因为 R 是 F 自反，则 R^n 是 F 自反，所以 $t(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$ 是 F 自反.

(3) 因为 R 是 F 对称，则 R^n 是 F 对称，所以 $t(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$ 是 F 对称.

(4) 由于 $t(R)$ 是包含 R 的最小传递关系，而 R 是 F 传递的，故 $t(R)=R$.

(5) $(t(R))^{-1}=(\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n)^{-1}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(R^n)^{-1}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(R^{-1})^n=t(R^{-1})$.

定理 4.2.8 设 $R\in F(X\times X)$，则：

(1) $R\cup I_X$ 是 X 上的 F 自反关系，是包含 R 的最小 F 自反关系；

(2) $R\cup R^{-1}$ 是 X 上的 F 对称关系，是包含 R 的最小 F 对称关系.

证明 (1) 因为 $I_X\subseteq R\cup I_X$，故 $R\cup I_X$ 是 F 自反关系.

设 S 是包含 R 的自反关系，则 $R\subseteq S$，从而 $R\cup I_X\subseteq S\cup I_X=S$，所以 $R\cup I_X$ 是包含 R 的最小的 F 自反关系.

(2) 因为 $(R\cup R^{-1})^{-1}=R^{-1}\cup R=R\cup R^{-1}$，故 $R\cup R^{-1}$ 是 F 对称关系.

设 S 是包含 R 的 F 对称关系，则 $R\subseteq S$，故 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$，从而

$$R\cup R^{-1}\subseteq S\cup S^{-1}=S$$

所以 $R\cup R^{-1}$是包含 R 的最小 F 对称关系.

定义 4.2.3 设 $R\in F(X\times X)$,则:

(1)称 $R\cup I_X$ 为 R 的 F 自反闭包,记为 $r(R)$;

(2)称 $R\cup R^{-1}$为 R 的 F 对称闭包,记为 $S(R)$.

即

$$r(R)=R\cup I_X \tag{4.47}$$

$$S(R)=R\cup R^{-1} \tag{4.48}$$

定义 4.2.4 设 $R\in F(X\times X)$,若 R 是 F 自反,F 对称关系,则称 R 是 X 上的 F 相似关系.

定理 4.2.9 (1)若 $\forall t\in T,R_t$ 是 X 上的 F 相似关系,则 $\bigcup\limits_{t\in T}R_t$, $\bigcap\limits_{t\in T}R_t$ 是 X 上的 F 相似关系.

(2)若 R 是 X 上的 F 相似关系,则 R^n 是 X 上的 F 相似关系.

由定理 4.2.1、推论 4.2.1 和推论 4.2.3 直接可得.

定理 4.2.10 设 $R\in F(X\times X)$,则 $R\cup R^{-1}\cup I_X$ 是 X 上的 F 相似关系,而且 $R\cup R^{-1}\cup I_X$是包含 R 的最小 F 相似关系.

证明显然,从略.

定义 4.2.5 设 $R\in F(X\times X)$,则称

$$a(R)=R\cup R^{-1}\cup I_X \tag{4.49}$$

是 X 上 R 的 F 相似闭包.

定理 4.2.11 设 $R\in F(X\times X)$,则 $\forall\lambda\in[0,1]$,

(1)R 是 X 上的 F 自反关系的充分必要条件是 R_λ 是 X 上的普通自反关系;

(2)R 是 X 上的 F 对称关系的充分必要条件是 R_λ 是 X 上的普通对称关系;

(3)R 是 X 上的 F 相似关系的充分必要条件是 R_λ 是 X 上的普通相似关系.

证明 设 R 是 F 自反,F 对称,即 R 是 F 相似.

$\forall\lambda\in[0,1]$,因为 $\forall x\in X,R(x,x)=1\geqslant\lambda$,故$(x,x)\in R_\lambda$,所以 R_λ 是普通自反关系.

若$(x,y)\in R_\lambda$,则 $R(y,x)=R(x,y)\geqslant\lambda$,从而$(y,x)\in R_\lambda$,所以 R_λ 是普通对称关系. 由此 R_λ 是普通相似关系.

反之,设 R_λ 是自反,对称,即相似,则由 F 关系的分解定理

$$R=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda R_\lambda$$

$$R(x,x)=(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda R_\lambda)(x,x)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda\wedge R_\lambda(x,x)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda=1$$

故 R 是 F 自反关系.

$$R(x,y)=(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda R_\lambda)(x,y)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda\wedge R_\lambda(x,y)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda\wedge R_\lambda(y,x)=R(y,x)$$

故 R 是 F 对称关系,从而 R 是 F 相似关系.

§4.3 模糊等价关系

定义 4.3.1 设 $R \in F(X \times X)$，若 R 是 F 自反，F 对称和 F 传递关系，则称 R 是 X 上模糊等价关系，简称 F 等价关系.

定理 4.3.1 (1)若 $\forall t \in T, R_t$ 是 X 上的 F 等价关系，则 $\bigcap_{t \in T} R_t$ 是 X 上的 F 等价关系.

(2)若 R 是 X 上的 F 等价关系，则 R^n 是 X 上的 F 等价关系.

由定理 4.2.1、推论 4.2.1、推论 4.2.3 和推论 4.2.4 直接可得.

定理 4.3.2 设 $R \in F(X \times X)$，则

$$t(S(R)) \cup I_X \tag{4.50}$$

是 X 上的 F 等价关系，$t(S(R)) \cup I_X$ 是包含 R 的最小等价关系.

其中

$$S(R) = R \cup R^{-1}.$$

证明 显然 $t(S(R)) \cup I_X$ 是 F 自反关系.

由于 $S(R) = R \cup R^{-1}$ 对称，由定理 4.2.7 知，$t(S(R))$ 是 F 对称，所以 $t(S(R)) \cup I_X$ 也是 F 对称.

现证传递性.

$$\begin{aligned}&(t(S(R)) \cup I_X) \circ (t(S(R)) \cup I_X)\\ &= t(S(R)) \circ t(S(R)) \cup t(S(R)) \circ I_X \cup I_X \circ t(S(R)) \cup I_X^2\\ &= t(S(R)) \cup I_X\end{aligned}$$

所以 $t(S(R)) \cup I_X$ 是 F 传递关系. 从而 $t(S(R)) \cup I_X$ 是 F 等价关系.

设 Q 是包含 R 的 F 等价关系，则由 Q 是 F 自反知，$Q \supseteq I_X$；由 Q 是 F 对称知，$Q \supseteq R \cup R^{-1} = S(R)$；由 Q 是 F 传递知，$Q = t(Q) \supseteq t(S(R))$，从而

$$Q \supseteq t(S(R)) \cup I_x$$

所以 $t(S(R)) \cup I_X$ 是包含 R 的最小 F 等价关系.

定义 4.3.2 设 $R \in F(X \times X)$，则称 $t(S(R)) \cup I_X$ 为 X 上 R 的 F 等价闭包，记为 $e(R)$.

定理 4.3.3 设 R 是 X 上的 F 相似关系，则 $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是 X 上的 F 等价关系，且 $e(R) = t(R)$.

证明 由定理 4.2.7 知，$t(R)$ 是 F 自反，F 对称，又因为 $t(R)$ 是 F 传递的，所以 $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是 F 等价关系.

由于 R 是 F 自反和 F 对称，则 $I_X \subseteq R, s(R)) = R$，由此

$$e(R) = t(S(R)) \cup I_X = t(R) \cup I_X = (\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n) \cup I_X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^n \cup I_X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = t(R).$$

定义 4.3.3 设 R 是 X 上的 F 等价关系，$\forall x \in X$，令 $[x] \in F(X)$，使得 $\forall y \in X$

$$[x](y)=R(x,y) \tag{4.51}$$

记

$$X/R=\{[x]\mid x\in X\} \tag{4.52}$$

则称 X/R 为由 R 决定的 F 商集.

定理 4.3.4 设 R 是 X 上的 F 等价关系,则 X/R 满足:

(1) $\forall x,y\in X,R(x,y)=0\Leftrightarrow[x]\cap[y]=\varnothing$;

(2) $\forall x,y\in X,R(x,y)=1\Leftrightarrow[x]=[y]$;

(3) $\bigcup\limits_{x\in X}[x]=X$.

证明 (1)若 $R(x,y)=0$,则 $\forall z\in X$

$$\begin{aligned}([x]\cap[y])(z)&=[x](z)\wedge[y](z)=R(x,z)\wedge R(y,z)\\&=R(x,z)\wedge R(z,y)\leqslant\bigvee_{z\in X}(R(x,z)\wedge R(z,y)\\&=R\circ R(x,y)\leqslant R(x,y)=0\end{aligned}$$

故 $[x]\cap[y]=\varnothing$.

若 $[x]\cap[y]=\varnothing$,则

$$R(x,y)=R(x,y)\wedge R(y,y)=[x](y)\wedge[y](y)=([x]\cap[y])(y)=0$$

即 $R(x,y)=0$.

(2)若 $R(x,y)=1$,则 $\forall z\in X$

$$\begin{aligned}[x](z)&=R(x,z)=R(x,z)\wedge R(x,y)=R(y,x)\wedge R(x,z)\\&\leqslant\bigvee_{x\in X}R(y,x)\wedge R(x,z)=R\circ R(y,z)\leqslant R(y,z)=[y](z)\end{aligned}$$

即 $[x]\subseteq[y]$. 同理证明 $[y]\subseteq[x]$,故 $[x]=[y]$.

若 $[x]=[y]$,则

$$R(x,y)=[x](y)=[y](y)=R(y,y)=1$$

(3) $\forall y\in X$,有

$$\Big(\bigcup_{x\in X}[x]\Big)(y)=\bigvee_{x\in X}[x](y)\geqslant[y](y)=R(y,y)=1$$

故 $\bigcup\limits_{x\in X}[x]=X$.

定理 4.3.5 设 $R\in F(X\times X)$,则 R 是 X 上的 F 等价关系的充分必要条件是 $\forall\lambda\in[0,1]$,R_λ 是 X 上的普通等价关系.

证明 由定理4.2.11 知 R 是 F 相似关系的充分必要条件是 R_λ 是普通相似关系.

现证 R 是 F 传递的充分必要条件是 R_λ 是普通传递.

必要性,设 $R\circ R\subseteq R$,设 $(x,y)\in R_\lambda,(y,z)\in R_\lambda$,则 $R(x,y)\geqslant\lambda,R(y,z)\geqslant\lambda$,于是 $R(x,y)\wedge R(y,z)\geqslant\lambda$,故 $\bigvee\limits_{y\in X}(R(x,y)\wedge R(y,z))=R\circ R(x,z)\geqslant\lambda$,从而 $R(x,z)\geqslant\lambda$. 由此,$(x,z)\in R_\lambda$,所以 R_λ 是普通传递关系.

充分性,已知 R_λ 是普通传递关系,即 $\forall(x,y)\in R_\lambda,(y,z)\in R_\lambda$,则 $(x,z)\in R_\lambda$,

故 $R(x,y)\geqslant\lambda, R(y,z)\geqslant\lambda$，则 $R(x,z)\geqslant\lambda$. $\forall y\in X$，令

$$\lambda=R(x,y)\wedge R(y,z)$$

则 $R(x,y)\geqslant\lambda, R(y,z)\geqslant\lambda$，由此，$R(x,z)\geqslant\lambda=R(x,y)\wedge R(y,z)$.

从而
$$R(x,z)\geqslant\bigvee_{y\in X}(R(x,y)\wedge R(y,z))=R\circ R(x,z)$$

即 $R\circ R\subseteq R$. 故 R 是 F 传递关系.

所以 R 是 F 等价关系的充分必要条件是 R_λ 是普通等价关系.

§4.4 模糊矩阵

定义 4.4.1 设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$是一个 F 矩阵.

(1)若 $\forall i,j,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$，有

$$r_{ij}=0 \tag{4.53}$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 是 F 零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}$.

(2)若 $\forall i,j,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$，有

$$r_{ij}=1 \tag{4.54}$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 是 F 全矩阵，记为 $\boldsymbol{E}$.

(3)若 $m=n,\forall i,j,1\leqslant i,j\leqslant m$，有

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases} \tag{4.55}$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 是 F 单位矩阵，记为 $\boldsymbol{I}$.

定义 4.4.2 设 F 矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{m\times n}$，定义 F 矩阵

(1)
$$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S}=(r_{ij}+s_{ij})_{m\times n} \tag{4.56}$$

(2)
$$\lambda\boldsymbol{R}=(\lambda r_{ij})_{m\times n},\quad \lambda\in[0,1] \tag{4.57}$$

称 $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的和，$\lambda\boldsymbol{R}$ 为数 λ 与 $\boldsymbol{R}$ 的乘积.

其中，当 $r_{ij}+s_{ij}\geqslant 1$ 时，令 $r_{ij}+s_{ij}=1$.

定义 4.4.3 设 F 矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times l},\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{l\times n}$，定义 F 矩阵

$$\boldsymbol{T}=(t_{ij})_{m\times n}=\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S} \tag{4.58}$$

其中
$$t_{ij}=\bigvee_{k=1}^{l}(r_{ik}\wedge s_{kj}). \tag{4.59}$$

称 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的乘积，即关系 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的合成.

定理 4.4.1 F 矩阵的加法、数乘法和乘法满足下列性质：$\forall\boldsymbol{R},\boldsymbol{S},\boldsymbol{T},\boldsymbol{Q}$ 是 F 矩阵

(1)
$$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{R} \tag{4.60}$$

(2)
$$(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S})+\boldsymbol{T}=\boldsymbol{R}+(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}) \tag{4.61}$$

(3)
$$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{R} \tag{4.62}$$

(4)
$$1\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R} \tag{4.63}$$

(5) $$\alpha(\beta \boldsymbol{R}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{R} \quad (\alpha,\beta \in [0,1]) \tag{4.64}$$

(6) $$(\alpha+\beta)\boldsymbol{R} = \alpha\boldsymbol{R} + \beta\boldsymbol{R} \quad (\alpha,\beta \in [0,1]) \tag{4.65}$$

(7) $$\alpha(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S}) = \alpha\boldsymbol{R} + \alpha\boldsymbol{S} \quad (\alpha \in [0,1]) \tag{4.66}$$

(8) $$(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}) \circ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \circ (\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{T}) \tag{4.67}$$

(9) $$\boldsymbol{R} \circ (\boldsymbol{S} + \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} + \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T} \tag{4.68}$$

$$(\boldsymbol{S} + \boldsymbol{T}) \circ \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{Q} \tag{4.69}$$

(10) $$(\alpha\boldsymbol{R}) \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{R} \circ (\alpha\boldsymbol{S}) = \alpha(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}) \quad (\alpha \in [0,1]) \tag{4.70}$$

(11) $$\boldsymbol{I} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{I} = \boldsymbol{R} \tag{4.71}$$

证明 (8)是定理4.1.3中(1)的特例,只证(9),其他显然.

(9)设 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{m\times l}$,$\boldsymbol{S} = (s_{ij})_{l\times n}$,$\boldsymbol{T} = (t_{ij})_{l\times n}$,因为 $\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}$ 的第 j 列为

$$(s_{1j}+t_{1j}, s_{2j}+t_{2j}, \cdots, s_{lj}+t_{lj})^{\mathrm{T}}$$

故 $\boldsymbol{R} \circ (\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})$ 的第 i 行、第 j 列元素为

$$\bigvee_{k=1}^{l}(r_{ik} \wedge (s_{kj}+t_{kj})) = \bigvee_{k=1}^{l}(r_{ik} \wedge s_{kj} + r_{ik} \wedge t_{kj}) = \bigvee_{k=1}^{l}(r_{ik} \wedge s_{kj}) + \bigvee_{k=1}^{l}(r_{ik} \wedge t_{kj})$$

上式等于 $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} + \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T}$ 的第 i 行、第 j 列元素.

所以 $\boldsymbol{R} \circ (\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} + \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T}$.

同理证明 $(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}) \circ \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{Q}$.

定义 4.4.4 设 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{m\times n}$是一个 F 矩阵,定义矩阵

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = (r_{ij}^{*})_{n\times m} \tag{4.72}$$

其中 $r_{ij}^{*} = r_{ji}$. 则称 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的转置矩阵,即为 $\boldsymbol{R}$ 的逆关系.

定理 4.4.2 设 $\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$ 为 F 矩阵,则

(1) $$(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R} \tag{4.73}$$

(2) $$(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \tag{4.74}$$

(3) $$(\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \circ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{4.75}$$

(4) $$(\alpha\boldsymbol{R})^{\mathrm{T}} = \alpha\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \quad (\alpha \in [0,1]) \tag{4.76}$$

证明 (1)是定理4.1.1中(4)的特例,(3)是定理4.1.3中(6)的特例.(2)和(4)的证明简单,从略.

定义 4.4.5 设 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{m\times n}$是 F 矩阵,若存在 F 矩阵 $\boldsymbol{S} = (s_{ij})_{n\times m}$,使得

$$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R} \tag{4.77}$$

则称 $\boldsymbol{S}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的广义 F 逆矩阵,此时称 $\boldsymbol{R}$ 是正则 F 矩阵.

例 4.4.1 设 $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.8 & 0.9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.8 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix}$.

不难验证 $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}$,故 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 都是 $\boldsymbol{R}$ 的广义 F 逆矩阵.

由此 F 矩阵的广义 F 逆矩阵不唯一.

定理 4.4.3 设 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{m\times n}$,则 $\boldsymbol{R}$ 是正则 F 矩阵的充分必要条件是存在 F 矩阵 $\boldsymbol{T} = (t_{ij})_{n\times n}$和 $\boldsymbol{S} = (s_{ij})_{n\times m}$,使得

$$R \circ T = R, \quad S \circ R = T \tag{4.78}$$

证明 若 R 是正则 F 矩阵,则存在广义 F 逆矩阵 $S=(s_{ij})_{n\times m}$,使得

$$R \circ S \circ R = R$$

取 $T = S \circ R$,则 $R \circ T = R$.

反之,$R \circ T = R, S \circ R = T$ 成立,则

$$R \circ S \circ R = R \circ (S \circ R) = R \circ T = R$$

故 S 是 R 的广义 F 逆矩阵,所以 R 是正则 F 矩阵.

定理 4.4.4 设 $R=(r_{ij})_{m\times n}$是 F 矩阵,令

$$X = (x_{pk})_{n\times m}$$

其中 $x_{pk} = \bigwedge_{ij} \{r_{ij} \mid r_{ij} < r_{ip} \wedge r_{kj}\}$,则 R 是正则的充分必要条件是

$$R \circ X \circ R = R$$

此时 X 是 R 的最大广义 F 逆矩阵,即若 S 是 R 的广义 F 逆矩阵,则 $S \subseteq X$.

证明 充分性显然.

必要性,设 $S=(s_{ij})_{n\times m}$是 R 的一个广义逆矩阵,则

$$R \circ S \circ R = R$$

而 $R \circ S \circ R$ 的第 i 行、第 j 列的元素为

$$\bigvee_{k=1}^{m}\left(\bigvee_{p=1}^{n}(r_{ip} \wedge s_{pk}) \wedge r_{kj}\right) = \bigvee_{k=1}^{m}\bigvee_{p=1}^{n}(r_{ip} \wedge s_{pk} \wedge r_{kj})$$

故 $r_{ij} = \bigvee_{k=1}^{m}\bigvee_{p=1}^{n}(r_{ip} \wedge s_{pk} \wedge r_{kj})$,由此,$r_{ij} \geqslant r_{ip} \wedge s_{pk} \wedge r_{kj} (1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant p \leqslant n)$.

于是,若 $r_{ip} \wedge r_{kj} > r_{ij}$,则 $s_{pk} \leqslant r_{ij}$,从而

$$s_{pk} \leqslant \bigwedge \{r_{ij} \mid r_{ij} < r_{ip} \wedge r_{kj}\} = x_{pk}$$

即 $S \subseteq X$,且

$$R = R \circ S \circ R \subseteq R \circ X \circ R$$

为了证明 $R = R \circ X \circ R$,须证 $R \supseteq R \circ X \circ R$. 而 $R \circ X \circ R$ 的第 i 行、第 j 列元素为

$$\bigvee_{k=1}^{m}\bigvee_{p=1}^{n}(r_{ip} \wedge x_{pk} \wedge r_{kj})$$

当 $r_{ij} \geqslant r_{ip} \wedge r_{kj}$时,有

$$r_{ij} \geqslant r_{ip} \wedge x_{pk} \wedge r_{kj}$$

当 $r_{ij} < r_{ip} \wedge r_{kj}$时,由 x_{pk}的定义

$$x_{pk} = \bigwedge \{r_{ij} \mid r_{ij} < r_{ip} \wedge r_{kj}\}$$

知

$$r_{ip} \wedge x_{pk} \wedge r_{kj} \leqslant r_{ij}$$

从而 $\bigvee_{k=1}^{m}\bigvee_{p=1}^{n}(r_{ip} \wedge x_{pk} \wedge r_{kj}) \leqslant r_{ij}$, 即 $R \circ X \circ R \subseteq R$,于是

$$R = R \circ X \circ R$$

所以 X 是 R 的广义 F 逆矩阵,且是最大的广义 F 逆矩阵.

设 $R=(r_{ij})_{m\times n}$是正则 F 矩阵,若存在 R 的广义 F 逆矩阵 T,即 $R \circ T \circ R = R$,

使得

$$T \circ R \circ T = T \tag{4.79}$$

则 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 互为广义 F 逆矩阵.

定理 4.4.5 设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$,若 $\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{n\times m}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的广义逆矩阵,即 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$,则

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S} \tag{4.80}$$

是 $\boldsymbol{R}$ 的广义 F 逆矩阵,且 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 互为广义 F 逆矩阵.

证明 因为

$$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})\circ\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R})\circ\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$$

于是 $\boldsymbol{T}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的广义 F 逆矩阵. 又因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}&=(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})\circ\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})=\boldsymbol{S}\circ(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R})\circ\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}\\&=\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}\circ(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R})\circ\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{R}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的广义 F 逆矩阵,即 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 互为广义 F 逆矩阵.

§4.5 模糊矩阵的幂收敛

设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵,记 $\boldsymbol{R}^0=\boldsymbol{I},\boldsymbol{R}^1=\boldsymbol{R},\cdots,\boldsymbol{R}^k=\boldsymbol{R}^{k-1}\circ\boldsymbol{R}$,则 $\forall m,l\in\mathbf{N}$,有

$$\boldsymbol{R}^m\circ\boldsymbol{R}^l=\boldsymbol{R}^{m+l},(\boldsymbol{R}^m)^l=\boldsymbol{R}^{ml} \tag{4.81}$$

定义 4.5.1 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵

(1)若 $\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}$,则称 $\boldsymbol{R}$ 为幂等矩阵;

(2)若存在 $m\in\mathbf{N}$,$\boldsymbol{R}^m=\boldsymbol{0}$,则称 $\boldsymbol{R}$ 为幂零矩阵;

(3)若 $\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{R}^2$,则称 $\boldsymbol{R}$ 为紧矩阵;

(4)若 $\boldsymbol{R}$ 满足:$r_{ii}\geqslant r_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{R}$ 为对角占优矩阵.

显然,(1)n 阶 F 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 是幂零的,则 $\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{0}$;

(2)若 F 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 是幂等的,则 $k>2$ 时,$\boldsymbol{R}^k=\boldsymbol{R}$;

(3)若 F 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 是紧的,则 $\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{R}^2\subseteq\cdots$;

(4)若 F 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 是对角占优的,则 R 是紧的,从而 $\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{R}^2\subseteq\cdots$.

定理 4.5.1 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵,则存在正整数 k,d 使得

$$\boldsymbol{R}^{k+d}=\boldsymbol{R}^k \tag{4.82}$$

证明 考虑 $\boldsymbol{R}$ 的幂序列 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^2,\cdots,\boldsymbol{R}^m,\cdots$.

由 F 矩阵乘法的定义知,$\boldsymbol{R}^2$ 中每个元素一定是与 $\boldsymbol{R}$ 中某一确定的元素相同,设 $\boldsymbol{R}$ 中互不相同的元素有 S 个,则 $\boldsymbol{R}$ 看做 $S\cdot n^2$ 个数的一个排列. $\boldsymbol{R}^2$ 也如此,继而 $\forall m\in\mathbf{N}$,$\boldsymbol{R}^m$ 也是如此,而这样的排列只有有限个互不相同,于是一定存在 d 和 k 使 $\boldsymbol{R}^k=\boldsymbol{R}^{k+d}$.

定义 4.5.2 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵.

(1)称

$$\min\{k \mid \boldsymbol{R}^{k+d}=\boldsymbol{R}^{k}, d \in \mathbf{N}\} \tag{4.83}$$

为 $\boldsymbol{R}$ 的指数.

(2)称

$$\min\{d \mid \boldsymbol{R}^{k+d}=\boldsymbol{R}^{k}, k \in \mathbf{N}\} \tag{4.84}$$

为 $\boldsymbol{R}$ 的周期.

(3)若 $\boldsymbol{R}$ 的周期为1,即存在 $k \in \mathbf{N}$ 使

$$\boldsymbol{R}^{k+1}=\boldsymbol{R}^{k} \tag{4.85}$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 幂收敛于 $\boldsymbol{R}^k$,简称 $\boldsymbol{R}$ 是幂收敛的.

定理4.5.2 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵,若 $\boldsymbol{R}$ 是紧的($\boldsymbol{R}^2 \supseteq \boldsymbol{R}$)或 $\boldsymbol{R}$ 是传递的($\boldsymbol{R}^2 \subseteq \boldsymbol{R}$),则 $\boldsymbol{R}$ 是幂收敛的.

证明 若 $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{R}^2$,则有 $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{R}^2 \subseteq \cdots$. 由定理4.5.1知,$\exists k, d \in \mathbf{N}$,使 $\boldsymbol{R}^{k+d}=\boldsymbol{R}^k$,则

$$\boldsymbol{R}^{k} \subseteq \boldsymbol{R}^{k+1} \subseteq \cdots \subseteq \boldsymbol{R}^{k+d}=\boldsymbol{R}^{k}$$

故 $\boldsymbol{R}^{k+1}=\boldsymbol{R}^k$,即 $\boldsymbol{R}$ 是幂等的.

$\boldsymbol{R}^2 \subseteq \boldsymbol{R}$ 的情况同理可证.

推论4.5.1 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶对角占优矩阵,则 $\boldsymbol{R}$ 是幂收敛矩阵.

定理4.5.3 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵,则当 $k>n$ 时

$$\boldsymbol{R}^{k} \subseteq \bigcup_{m=1}^{n} \boldsymbol{R}^{m} \tag{4.86}$$

证明 记 $\boldsymbol{R}^k=(r_{ij}^{(k)})_{m \times n}$,我们有

$$r_{ij}^{(2)}=\bigvee_{j_1=1}^{n}(r_{ij_1} \wedge r_{j_1 j})$$

$$r_{ij}^{(3)}=\bigvee_{j_1=1}^{n}(r_{ij_1} \wedge r_{j_1 j}^{(2)})=\bigvee_{j_1=1}^{n}(r_{ij_1} \wedge \bigvee_{j_2=1}^{n}(r_{j_1 j_2} \wedge r_{j_2 j}))=\bigvee_{j_1=1}^{n}\bigvee_{j_2=1}^{n}(r_{ij_1} \wedge r_{j_1 j_2} \wedge r_{j_2 j})$$

一般地

$$r_{ij}^{(k)}=\bigvee_{j_1=1}^{n} \cdots \bigvee_{j_{k-1}=1}^{n}(r_{ij_1} \wedge r_{j_1 j_2} \wedge \cdots \wedge r_{j_{k-1} j})$$

当 $k>n$ 时,上面 k 个脚码 $j_1, \cdots, j_{k-1}, j$ 中必有重复的情况,不妨设 $j_l=j_s$,则略去

$$r_{j_l j_{l+1}} \wedge r_{j_{l+1} j_{l+2}} \wedge \cdots \wedge r_{j_{s-1} j_s}$$

则有

$$r_{ij_1} \wedge r_{j_1 j_2} \wedge \cdots \wedge r_{j_{k-1} j} \leqslant r_{ij_1} \wedge \cdots \wedge r_{j_{l-1} j_l} \wedge r_{j_s j_{s+1}} \wedge \cdots \vee r_{j_{k-1} j}$$

即当 $j_l=j_s$ 时,可以减少 $s-l$ 个因子,依此类推,总可以使它不出现重复因子,所以总存在 $m \leqslant n$,使

$$\underbrace{r_{ij_1} \wedge r_{j_1 j_2} \wedge \cdots \wedge r_{j_{k-1} j}}_{K个} \leqslant \underbrace{r_{il_1} \wedge r_{l_1 l_2} \wedge \cdots \wedge r_{l_{m-1} j}}_{m个}$$

从而

$$r_{ij_1} \wedge r_{j_1 j_2} \wedge \cdots \wedge r_{j_{k-1} j} \leqslant \bigvee_{l_1=1}^{n} \cdots \bigvee_{l_{m-1}=1}^{n}(r_{il_1} \wedge r_{l_1 l_2} \wedge \cdots \wedge r_{l_{m-1} j})=r_{ij}^{(m)}$$

于是

$$r_{ij}^{(k)} = \bigvee_{j_1=1}^{n} \cdots \bigvee_{j_{k-1}=1}^{n} (r_{ij_1} \wedge r_{j_1j_2} \wedge \cdots \wedge r_{j_{k-1}j}) \leqslant r_{ij}^{(m)}$$

即 $\boldsymbol{R}^k \subseteq \boldsymbol{R}^m$. 所以当 $k > n$ 时, $\boldsymbol{R}^k \subseteq \bigcup_{m=1}^{n} \boldsymbol{R}^m$.

定理 4.5.4 设 n 阶 F 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 是正则的, 且幂收敛于 $\boldsymbol{R}^k$, 则对于 $\boldsymbol{R}$ 的任意广义 F 逆矩阵 $\boldsymbol{G}$, 有

$$\boldsymbol{R}^k \circ \boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{R}^k = \boldsymbol{R}^k \tag{4.87}$$

即 $\boldsymbol{G}$ 也是 $\boldsymbol{R}^k$ 的广义 F 逆矩阵.

证明 由于 $\boldsymbol{R}$ 正则, 则

$$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}$$

由于 $\boldsymbol{R}^{k+1} = \boldsymbol{R}^k$, 则 $\boldsymbol{R}^{k+m} = \boldsymbol{R}^k (m \in \mathbf{N})$, 于是

$$\boldsymbol{R}^k \circ \boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{R}^k = \boldsymbol{R}^{k-1} \circ (\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{R}) \circ \boldsymbol{R}^{k-1} = \boldsymbol{R}^{2k-1} = \boldsymbol{R}^k$$

所以 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{R}^k$ 的广义 F 逆矩阵.

定理 4.5.5 设 n 阶 F 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 正则, 若存在 $\boldsymbol{R}$ 的广义 F 逆矩阵 $\boldsymbol{G} \supseteq \boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{R}$ 是幂收敛的, 即 $\exists k \in \mathbf{N}$, 使 $\boldsymbol{R}^{k+1} = \boldsymbol{R}^k$.

证明 由于 $\boldsymbol{R}$ 正则, 故

$$\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}$$

又由于 $\boldsymbol{G} \supseteq \boldsymbol{I}$, 则

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{R} \supseteq \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{I} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^2$$

故由定理 4.5.2 知, $\boldsymbol{R}$ 是幂收敛的, 即 $\exists k \in \mathbf{N}$, 使 $\boldsymbol{R}^{k+1} = \boldsymbol{R}^k$.

定理 4.5.6 设 n 阶 F 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 是正则的, 且 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 互为广义 F 逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{R}$, 则 $\boldsymbol{R}$ 幂收敛的充分必要条件是 $\boldsymbol{T}$ 也幂收敛, 而且 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的指数相等.

证明 必要性, 设 $\boldsymbol{R}$ 幂收敛, 设指数为 k_1, 即 $\boldsymbol{R}^{k_1+1} = \boldsymbol{R}^{k_1}$, 则由定理 4.5.4 知 $\boldsymbol{T}$ 是 $\boldsymbol{R}^{k_1}$ 的广义逆矩阵, 即

$$\boldsymbol{R}^{k_1} \circ \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{R}^{k_1} = \boldsymbol{R}^{k_1}$$

又由于 $\boldsymbol{R}$ 是正则的, 即 $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}$, 且 $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{R}$, 则

$$\boldsymbol{R}^{k_1} \circ \boldsymbol{T}^{k_1} \circ \boldsymbol{R}^{k_1} = \boldsymbol{R}^{k_1-1} \circ \boldsymbol{T}^{k_1-1} \circ (\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{R}) \boldsymbol{R}^{k_1-1} = \boldsymbol{R}^{k_1-1} \circ \boldsymbol{T}^{k_1-1} \circ \boldsymbol{R}^{k_1} = \cdots = \boldsymbol{R}^{k_1}$$

上面两式两边相乘得

$$\boldsymbol{R}^{k_1} \circ \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{R}^{k_1} \circ \boldsymbol{R}^{k_1} \circ \boldsymbol{T}^{k_1} \circ \boldsymbol{R}^{k_1} = \boldsymbol{R}^{k_1} \circ \boldsymbol{R}^{k_1}$$

又由 $\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T}$ 得

$$\boldsymbol{R}^{2k_1} \circ \boldsymbol{T}^{k_1+1} \circ \boldsymbol{R}^{2k_1} = \boldsymbol{R}^{2k_1}$$

由于 $\boldsymbol{R}^{k_1+1} = \boldsymbol{R}^{k_1}$, 故 $\boldsymbol{R}^{2k_1} = \boldsymbol{R}^{k_1}$, 由此

$$\boldsymbol{R}^{k_1} \circ \boldsymbol{T}^{k_1+1} \circ \boldsymbol{R}^{k_1} = \boldsymbol{R}^{k_1}$$

等式两边左乘 $\boldsymbol{T}^{k_1}$, 右乘 $\boldsymbol{T}^{k_1}$ 得

$$\boldsymbol{T}^{k_1} \circ \boldsymbol{R}^{k_1} \circ \boldsymbol{T}^{k_1+1} \circ \boldsymbol{R}^{k_1} \circ \boldsymbol{T}^{k_1} = \boldsymbol{T}^{k_1} \circ \boldsymbol{R}^{k_1} \circ \boldsymbol{T}^{k_1}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 互为广义 F 逆矩阵，则 $\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}$，由 $\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}$ 易证 $\boldsymbol{T}^{k_1}\circ\boldsymbol{R}^{k_1}\circ\boldsymbol{T}^{k_1}=\boldsymbol{T}^{k_1}$，而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}^{k_1}\circ\boldsymbol{R}^{k_1}\circ\boldsymbol{T}^{k_1+1}\circ\boldsymbol{R}^{k_1}\circ\boldsymbol{T}^{k_1}&=(\boldsymbol{T}^{k_1}\circ\boldsymbol{R}^{k_1}\circ\boldsymbol{T}^{k_1})\circ\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{R}^{k_1}\circ\boldsymbol{T}^{k_1}\\&=\boldsymbol{T}^{k_1}\circ\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{R}^{k_1}\circ\boldsymbol{T}^{k_1}=\boldsymbol{T}\circ(\boldsymbol{T}^{k_1}\circ\boldsymbol{R}^{k_1}\circ\boldsymbol{T}^{k_1})=\boldsymbol{T}^{k_1+1}\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{T}^{k_1+1}=\boldsymbol{T}^{k_1}$. 即 $\boldsymbol{T}$ 幂收敛于 $\boldsymbol{T}^{k_1}$，由 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的对称性，充分性也成立.

设 $\boldsymbol{T}$ 的指数为 k_2，由 $\boldsymbol{T}^{k_1+1}=\boldsymbol{T}^{k_1}$ 知 $k_2\leqslant k_1$.

由于 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 互为广义 F 逆矩阵，又由充分性同理可证 $k_1\leqslant k_2$，所以 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的指数相等.

§4.6 模糊分类与聚类图

定义 4.6.1 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵.

(1)若 $\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{R}$，则称 $\boldsymbol{R}$ 为自反矩阵；

(2)若 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}$，则称 $\boldsymbol{R}$ 为对称矩阵；

(3)若 $\boldsymbol{R}^2\subseteq\boldsymbol{R}$，则称 $\boldsymbol{R}$ 为传递矩阵；

(4)若 $\boldsymbol{R}$ 是自反的又是对称的，则称 $\boldsymbol{R}$ 是相似矩阵；

(5)若 $\boldsymbol{R}$ 是自反的，对称的和传递的，则称 $\boldsymbol{R}$ 是等价矩阵.

显然，一个 F 自反(对称、传递、相似、等价)矩阵对应于一个有限论域上的一个 F 自反(对称、传递、相似、等价)关系.

由定理 4.2.2 知，若 $\boldsymbol{R}$ 是自反矩阵，则

$$\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{R}^2\subseteq\cdots\subseteq\boldsymbol{R}^n\subseteq\cdots$$

若 $\boldsymbol{R}$ 是传递矩阵，则

$$\boldsymbol{R}\supseteq\boldsymbol{R}^2\supseteq\cdots\supseteq\boldsymbol{R}^n\supseteq\cdots$$

所以若 $\boldsymbol{R}$ 是自反和传递矩阵，则 $\boldsymbol{R}$ 是幂等的，即 $\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}$.

定理 4.6.1 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵，则

(1) $\boldsymbol{R}$ 的自反闭包 $$r(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{I}\tag{4.88}$$

(2) $\boldsymbol{R}$ 的对称闭包 $$s(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\tag{4.89}$$

(3) $\boldsymbol{R}$ 的相似闭包 $$a(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cup\boldsymbol{I}\tag{4.90}$$

(4) $\boldsymbol{R}$ 的传递闭包 $$t(\boldsymbol{R})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{R}^n\tag{4.91}$$

(5) $\boldsymbol{R}$ 的等价闭包 $$e(\boldsymbol{R})=t(s(\boldsymbol{R}))\cup\boldsymbol{I}\tag{4.92}$$

(6) $\boldsymbol{R}$ 是相似矩阵，则 $\boldsymbol{R}$ 的等价闭包

$$e(\boldsymbol{R})=t(\boldsymbol{R})\cup\boldsymbol{I}=t(\boldsymbol{R})\tag{4.93}$$

定理结论直接由 §4.2 中的结论得到.

定理 4.6.2 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵，则

$$t(\boldsymbol{R})=\bigcup_{m=1}^{n}\boldsymbol{R}^m\tag{4.94}$$

证明 因为 $t(\boldsymbol{R})=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\boldsymbol{R}^m$，由定理 4.5.3 知当 $k>n$ 时，$\boldsymbol{R}^k\subseteq\bigcup\limits_{m=1}^{n}\boldsymbol{R}^m$，所以

$$t(\boldsymbol{R})=\bigcup_{m=1}^{\infty}\boldsymbol{R}^m=\left(\bigcup_{m=1}^{n}\boldsymbol{R}^m\right)\cup\left(\bigcup_{m=n+1}^{\infty}\boldsymbol{R}^m\right)=\bigcup_{m=1}^{n}\boldsymbol{R}^m.$$

定理 4.6.3 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 相似矩阵，则存在最小的正整数 $k\leqslant n$，使

$$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^k \tag{4.95}$$

且对于一切 $l\geqslant k$，存在 $\boldsymbol{R}^k=\boldsymbol{R}^l$.

证明 由于 $\boldsymbol{R}$ 是自反矩阵，则 $\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{R}^2\subseteq\cdots\subseteq\boldsymbol{R}^n\subseteq\cdots$，由此

$$t(\boldsymbol{R})=\bigcup_{m=1}^{n}\boldsymbol{R}^m=\boldsymbol{R}^n$$

由于 n 有限，则存在最小自然数 $k\leqslant n$，使

$$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^k$$

若 $l\geqslant k$，则 $\boldsymbol{R}^k\subseteq\boldsymbol{R}^l$，从而

$$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^k\subseteq\boldsymbol{R}^l\subseteq\bigcup_{m=1}^{n}\boldsymbol{R}^m=t(\boldsymbol{R})$$

所以 $\boldsymbol{R}^l=\boldsymbol{R}^k$.

推论 4.6.1 设 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶相似矩阵，则存在一个最小的正整数 k，使 $\boldsymbol{R}^k$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的等价闭包，即

$$e(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^k \tag{4.96}$$

由此，我们可以用平方法求相似矩阵的等价闭包，即求出 $\boldsymbol{R}^2,\boldsymbol{R}^4,\cdots$，若首次出现

$$\boldsymbol{R}^{2l}\circ\boldsymbol{R}^{2l}=\boldsymbol{R}^{2l}$$

则
$$e(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^{2l}.$$

定义 4.6.2 设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$ 是 F 矩阵，$\forall\lambda\in[0,1]$，记

$$\boldsymbol{R}_\lambda=(\bar{r}_{ij})_{m\times n}$$

$$\bar{r}_{ij}=\begin{cases}1, & r_{ij}\geqslant\lambda\\ 0, & r_{ij}<\lambda\end{cases}$$

则称 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的 λ-截矩阵，$\boldsymbol{R}_\lambda$ 所对应的关系称为 $\boldsymbol{R}$ 的截关系.

F 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中的元素只有 0 或 1 的矩阵称为布尔矩阵，所以 F 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的 λ-截矩阵是一个布尔矩阵.

定理 4.6.4 设 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{S}$ 是 F 矩阵，则 $\forall\lambda\in[0,1]$.

(1)
$$\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{S}\Leftrightarrow\boldsymbol{R}_\lambda\subseteq\boldsymbol{S}_\lambda \tag{4.97}$$

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}\Leftrightarrow\boldsymbol{R}_\lambda=\boldsymbol{S}_\lambda \tag{4.98}$$

(2)
$$(\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S})_\lambda=\boldsymbol{R}_\lambda\cup\boldsymbol{S}_\lambda \tag{4.99}$$

$$(\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S})_\lambda=\boldsymbol{R}_\lambda\cap\boldsymbol{S}_\lambda \tag{4.100}$$

证明 (1) 设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{m\times n}$，若 $\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{S}$，则 $\boldsymbol{R}_\lambda\subseteq\boldsymbol{S}_\lambda$ 是显然的. 反之，若 $\boldsymbol{R}\not\subseteq\boldsymbol{S}$，则 $\exists\, i_o,j_o$，使 $r_{i_oj_o}>s_{i_oj_o}$，取 $\lambda=s_{i_oj_o}$，则有

$$\bar{r}_{i_o j_o}=1,\quad \bar{s}_{i_o j_o}=0$$

故 $R_\lambda \not\subseteq S_\lambda$，矛盾. 所以 $R\subseteq S$.

同理证明 $R=S\Leftrightarrow R_\lambda=S_\lambda$.

(2) $\forall i,j$，由于

$$r_{ij}\vee s_{ij}\geqslant\lambda\Leftrightarrow r_{ij}\geqslant\lambda \text{ 或 } s_{ij}\geqslant\lambda$$

$$r_{ij}\wedge s_{ij}\geqslant\lambda\Leftrightarrow r_{ij}\geqslant\lambda \text{ 且 } s_{ij}\geqslant\lambda$$

所以 $$(R\cup S)_\lambda=R_\lambda\cup S_\lambda,\ (R\cap S)_\lambda=R_\lambda\cap S_\lambda.$$

一般地，$\{R^{(t)}\mid t\in T\}$ 是 F 矩阵集合族，则

$$\left(\bigcup_{t\in T}R^{(t)}\right)_\lambda\neq\bigcup_{t\in T}R_\lambda^{(t)}\tag{4.101}$$

$$\left(\bigcap_{t\in T}R^{(t)}\right)_\lambda=\bigcap_{t\in T}R_\lambda^{(t)}\tag{4.102}$$

定理 4.6.5 设 R,S 是 F 矩阵，则 $\forall\lambda\in[0,1]$.

$$(R\circ S)_\lambda=R_\lambda\circ S_\lambda\tag{4.103}$$

证明 设 $R\circ S=Q$，$R=(r_{ij})_{m\times l}$，$S=(s_{ij})_{l\times n}$，$Q=(q_{ij})_{m\times n}$，记 $Q_\lambda=(\bar{q}_{ij})_{m\times n}$，则

$$\bar{q}_{ij}=1\Leftrightarrow q_{ij}\geqslant\lambda\Leftrightarrow\bigvee_{k=1}^{l}(r_{ik}\wedge s_{kj})\geqslant\lambda\Leftrightarrow\exists k,r_{ik}\wedge s_{kj}\geqslant\lambda\Leftrightarrow\exists k,r_{ik}\geqslant\lambda \text{ 且 } s_{kj}\geqslant\lambda\Leftrightarrow$$
$$\exists k,\bar{r}_{ik}=1 \text{ 且 } \bar{s}_{ij}=1\Leftrightarrow\bigvee_{k=1}^{l}(\bar{r}_{ik}\wedge\bar{s}_{kj})=1$$

$$\bar{q}_{ij}=0\Leftrightarrow\bar{q}_{ij}\neq1\Leftrightarrow\bigvee_{k=1}^{l}(\bar{r}_{ik}\wedge\bar{s}_{kj})\neq1\Leftrightarrow\bigvee_{k=1}^{l}(\bar{r}_{ik}\wedge\bar{s}_{kj})=0$$

所以 $$(R\circ S)_\lambda=R_\lambda\circ S_\lambda.$$

由定理 4.2.11 和定理 4.3.5 立即可得下面的定理.

定理 4.6.6 设 R 是 n 阶 F 矩阵，则：

(1) R 是 F 自反矩阵的充分必要条件是 R_λ 是普通自反矩阵，R_λ 对应于普通自反关系；

(2) R 是 F 对称矩阵的充分必要条件是 R_λ 是普通对称矩阵，R_λ 对应于普通对称关系；

(3) R 是 F 传递矩阵的充分必要条件是 R_λ 是普通传递矩阵，R_λ 对应于普通传递关系；

(4) R 是 F 相似矩阵的充分必要条件是 R_λ 是普通相似矩阵，R_λ 对应于普通相似关系；

(5) R 是 F 等价矩阵的充分必要条件是 R_λ 是普通等价矩阵，R_λ 对应于普通等价关系.

如果 R 是有限论域 X 上的一个 F 等价关系，即 R 是一个 F 等价矩阵，由于每一个 R_λ 描述了 X 上的一个普通的等价关系，所以可以将 X 进行分类. 当 λ 从 1 降至 0 时，R_λ 不断发生变化，这种分类也随之变化，所以就得到 X 的一种动态分类

图像.

定理 4.6.7 设 $\boldsymbol{R}$ 是有限论域 X 上的 F 等价关系,若 $\lambda,\mu\in[0,1]$,且 $\lambda<\mu$,则 $\boldsymbol{R}_\mu$ 所分出的每一类是 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 所分出的某一类的子类,即 $\boldsymbol{R}_\mu$ 的分类细于 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 的分类.

证明 设 $\boldsymbol{R}_\mu=(\bar{r}'_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{R}_\lambda=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$. 若 $\bar{r}'_{ij}=1$,则 $r_{ij}\geqslant\mu>\lambda$,故 $\bar{r}_{ij}=1$.

这说明,若 x_i,x_j 按 $\boldsymbol{R}_\mu$ 归为一类,则 x_i,x_j 也按 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 归为一类,所以 $\boldsymbol{R}_\mu$ 的每一类是 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 的某一类的子类.

例 4.6.1 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,$\boldsymbol{R}$ 是 X 上的一个 F 关系.

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5\\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4\\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6\\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1\end{pmatrix}$$

易证 $\boldsymbol{R}$ 是一个 F 等价关系.

令 λ 从 1 降至 0,x_i,x_j 按 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 中的 $\bar{r}_{ij}=1$ 归类. 若 $\lambda=1$,则

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则相应的分类结果是 $\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\}$. 若 $\lambda=0.8$,则

$$\boldsymbol{R}_{0.8}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

相应的分类结果是 $\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4\},\{x_5\}$. 若 $\lambda=0.6$,则

$$\boldsymbol{R}_{0.6}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

相应的分类结果是 $\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4,x_5\}$. 若 $\lambda=0.5$,则

$$R_{0.5}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

相应的分类结果是$\{x_1,x_3,x_4,x_5\}$，$\{x_2\}$. 若 $\lambda=0.4$，则

$$R_{0.4}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

相应的分类结果是$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$.

总结起来，得一个聚类图，如图 4.1 所示.

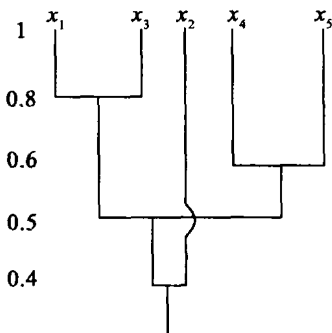


图 4.1

由推论 4.6.1 得知，若 R 是 X 上的一个相似关系，则用平方法求出 R 的等价闭包 $t(R)$，再用上面的动态聚类方法求得 $t(R)$ 的动态分类，由于 $t(R)\neq R$，从而得到对论域 X 的分类是一个近似的动态分类.

§4.7　带约束的模糊关系

定义 4.7.1　设 $R\in F(X\times X)$，$A\in F(X)$，若 $\forall x,y\in X$，有

$$R(x,y)\leqslant A(x)\wedge A(y)\tag{4.104}$$

则称 R 为约束 A 上的模糊关系.

定理 4.7.1　设 R,R_1,R_2 是约束 A 上的 F 关系，则 R^m $(m\in\mathbf{N})$，$R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$也是约束 A 上的 F 关系.

证明 因为 $\forall x,y\in X$,

$$\boldsymbol{R}^m(x,y)=\bigvee_{x_1\in X}\cdots\bigvee_{x_{m-1}\in X}(\boldsymbol{R}(x,x_1)\wedge\boldsymbol{R}(x_1,x_2)\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{R}(x_{m-1}y))$$
$$\leqslant\bigvee_{x_1\in X}\cdots\bigvee_{x_{m-1}\in X}(A(x)\wedge A(x_1)\wedge\cdots\wedge A(y))$$
$$\leqslant\bigvee_{x_1\in X}\cdots\bigvee_{x_{m-1}\in X}(A(x)\wedge A(y))=A(x)\wedge A(y)$$

故 $\boldsymbol{R}^m$ 是约束 A 上的 F 关系.

$$(\boldsymbol{R}_1\cup\boldsymbol{R}_2)(x,y)=\boldsymbol{R}_1(x,y)\vee\boldsymbol{R}_2(x,y)\leqslant A(x)\wedge A(y)$$

故 $\boldsymbol{R}_1\cup\boldsymbol{R}_2$ 是约束 A 上的 F 关系.

同理证明 $\boldsymbol{R}_1\cap\boldsymbol{R}_2$ 也是约束 A 上的 F 关系.

定义 4.7.2 设 $\boldsymbol{R}\in F(X\times X)$,若 $\forall x,y\in X$,有

$$\boldsymbol{R}(x,y)\leqslant\boldsymbol{R}(x,x)\tag{4.105}$$

则称 $\boldsymbol{R}$ 是弱 F 自反关系.

特别地,若 $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶 F 矩阵,则 $\boldsymbol{R}$ 是弱 F 自反等价于 $\boldsymbol{R}$ 是对角占优矩阵.

定理 4.7.2 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的弱 F 自反关系,则 $\forall n\in\mathbf{N},\boldsymbol{R}^n\subseteq\boldsymbol{R}^{n+1}$.

证明 因为

$$\boldsymbol{R}^2(x,y)=\bigvee_{z\in X}(\boldsymbol{R}(x,z)\wedge\boldsymbol{R}(z,y))\geqslant\boldsymbol{R}(x,x)\wedge\boldsymbol{R}(x,y)=\boldsymbol{R}(x,y)$$

故 $\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{R}^2$,从而 $\boldsymbol{R}^n\subseteq\boldsymbol{R}^{n+1}$.

定理 4.7.3 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的弱 F 自反关系,则 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}^{-1}(x,x)=\boldsymbol{R}(x,x)$.

证明 因为

$$(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}^{-1})(x,x)=\bigvee_{y\in X}(\boldsymbol{R}(x,y)\wedge\boldsymbol{R}^{-1}(y,x))\geqslant\boldsymbol{R}(x,y)\wedge\boldsymbol{R}^{-1}(y,x)=\boldsymbol{R}(x,y)$$

对任意的 $y\in X$ 都成立,故 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}^{-1}(x,x)\geqslant\boldsymbol{R}(x,x)$.

又因为 $\forall x,y\in X$

$$(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}^{-1})(x,y)=\bigvee_{z\in X}(\boldsymbol{R}(x,z)\wedge\boldsymbol{R}^{-1}(z,y))$$
$$=\bigvee_{z\in X}(\boldsymbol{R}(x,z)\wedge\boldsymbol{R}(y,z))\leqslant\bigvee_{z\in X}\boldsymbol{R}(x,z)\leqslant\boldsymbol{R}(x,x)$$

故$(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}^{-1})(x,x)\leqslant\boldsymbol{R}(x,x)$. 所以 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}^{-1}(x,x)=\boldsymbol{R}(x,x)$

推论 4.7.1 若 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上 F 对称的弱自反关系,则

$$\boldsymbol{R}^n(x,x)=\boldsymbol{R}(x,x)\quad(n\in\mathbf{N}).$$

定理 4.7.4 若 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上 F 对称的弱自反关系,则 $\boldsymbol{R}^n$ 也是 X 上的 F 对称的弱自反关系.

证明 $\boldsymbol{R}^n$ 是 F 对称推论 4.2.3 已证. 因为

$$\boldsymbol{R}^2(x,y)=\bigvee_{z\in X}(\boldsymbol{R}(x,z)\wedge\boldsymbol{R}(z,y))\leqslant\bigvee_{z\in X}\boldsymbol{R}(x,z)\leqslant\boldsymbol{R}(x,x)=\boldsymbol{R}^2(x,x)$$
$$\boldsymbol{R}^3(x,y)=\bigvee_{z\in X}(\boldsymbol{R}(x,z)\wedge\boldsymbol{R}^2(z,y))\leqslant\bigvee_{z\in X}\boldsymbol{R}(x,z)\leqslant\boldsymbol{R}(x,x)=\boldsymbol{R}^3(x,x)$$

由此 $\forall n\in\mathbf{N},\boldsymbol{R}^n(x,y)\leqslant\boldsymbol{R}^n(x,x)$.

所以 $\boldsymbol{R}^n$ 是 F 对称的弱自反关系.

定理 4.7.5　若 $\boldsymbol{R}_t(t\in T)$ 是弱 F 自反关系,则 $\bigcup_{t\in T}\boldsymbol{R}_t$, $\bigcap_{t\in T}\boldsymbol{R}_t$ 也是弱 F 自反关系.

证明简单,从略.

定义 4.7.3　设 $\boldsymbol{R}$ 是带约束 A 上的 F 关系,若 $\boldsymbol{R}$ 满足:

(1)$\boldsymbol{R}$ 是弱 F 自反,且

$$\boldsymbol{R}(x,x)=A(x) \tag{4.106}$$

(2)$\boldsymbol{R}$ 是 F 对称,即 $\boldsymbol{R}(x,y)=\boldsymbol{R}(y,x)$;

(3)$\boldsymbol{R}$ 是 F 传递,即 $\boldsymbol{R}^2\subseteq\boldsymbol{R}$.

则称 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的弱 F 等价关系,若满足(1)和(2),则称为 X 上的弱 F 相似关系.

定理 4.7.6　设 $\boldsymbol{R}$ 是约束 A 上的 F 关系,若 $\boldsymbol{R}$ 是弱 F 相似关系,则 $\boldsymbol{R}$ 的传递闭包 $t(\boldsymbol{R})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{R}^n$ 是 X 上的弱 F 等价关系,即 $e(\boldsymbol{R})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{R}^n$.

证明　由推论 4.7.1、定理 4.7.4 和定理 4.7.5 知,$t(\boldsymbol{R})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{R}^n$ 是弱 F 自反,又 $\forall n\in\mathbf{N}$,

$$\boldsymbol{R}^n(x,x)=\boldsymbol{R}(x,x)=A(x)$$

故

$$t(\boldsymbol{R})(x,x)=A(x).$$

又因为 $t(\boldsymbol{R})$ 的对称性和传递性在§4.2中已证,所以 $t(\boldsymbol{R})=e(\boldsymbol{R})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{R}^n$ 是 X 上弱 F 等价关系.

定理 4.7.7　若 $\boldsymbol{R}$ 是有限论域 X 上约束 A 的弱 F 相似关系,即

(1) $\forall i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$,

$$r_{ij}\leqslant r_{ii}=A(x_i) \tag{4.107}$$

(2) $\forall i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$, $r_{ij}=r_{ji}$.

则存在最小的正整数 $k\leqslant n$,使 $e(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^k$ 是 X 上的弱 F 等价关系,且当 $l\geqslant k$ 时

$$\boldsymbol{R}^k=\boldsymbol{R}^l.$$

证明　由定理 4.5.3 知,当 $k>n$ 时,$\boldsymbol{R}^k\subseteq\bigcup_{m=1}^{n}\boldsymbol{R}^n$,故 $e(\boldsymbol{R})=\bigcup_{m=1}^{\infty}\boldsymbol{R}^n=\bigcup_{m=1}^{n}\boldsymbol{R}^m$.

又由定理4.7.2 知 $\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{R}^2\subseteq\cdots$,故 $e(\boldsymbol{R})=\bigcup_{m=1}^{n}\boldsymbol{R}^m=\boldsymbol{R}^n$. 由于 n 的有限性,$\exists k\in\mathbf{N}$,

$$\boldsymbol{R}^k=\boldsymbol{R}^n=e(\boldsymbol{R}).$$

若 $l\geqslant k$,则 $\boldsymbol{R}^k\subseteq\boldsymbol{R}^l$,故 $e(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^k\subseteq\boldsymbol{R}^l\subseteq\bigcup_{m=1}^{n}\boldsymbol{R}^m=e(\boldsymbol{R})$. 所以 $\boldsymbol{R}^l=\boldsymbol{R}^k$.

设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$A\in F(X)$,记

$$\mu=\bigwedge_{i=1}^{n}A(x_i) \tag{4.108}$$

若 $\boldsymbol{R}$ 是 X 中约束 A 上的弱 F 等价关系,$\forall\lambda\in[0,1]$,$\lambda\leqslant\mu$,则 $\boldsymbol{R}$ 的 λ-截关系 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 是 X 上普通等价关系. 由此当 λ 从 μ 降至 0 时,对 R_λ 进行分类,这样就得到 X 的一种动态分类图.

例 4.7.1　设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$,$\boldsymbol{R}$ 是约束 A 上的 F 关系

$$R=\begin{pmatrix}1&0.3&0.4\\0.3&0.8&0.7\\0.4&0.7&0.9\end{pmatrix},\quad A=(1,0.8,0.9)$$

显然 $\boldsymbol{R}$ 是 F 对称且是弱 F 自反的. 用平方法求 $\boldsymbol{R}$ 的传递闭包 $t(\boldsymbol{R})$.

$$\boldsymbol{R}^2=\begin{pmatrix}1&0.3&0.4\\0.3&0.8&0.7\\0.4&0.7&0.9\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&0.3&0.4\\0.3&0.8&0.7\\0.4&0.7&0.9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0.4&0.4\\0.4&0.8&0.7\\0.4&0.7&0.9\end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{R}^2\circ\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}^2$,故 $t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^2$,且 $t(\boldsymbol{R})$ 是 X 上的弱 F 等价关系,即

$$e(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^2.$$

因为 $\mu=\bigwedge_{i=1}^{3}A(x_i)=0.8$,令 $\lambda=0.8$

$$(e(\boldsymbol{R}))_{0.8}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则相应分类结果是 $\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\}$. 令 $\lambda=0.7$

$$(e(\boldsymbol{R}))_{0.7}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

则相应分类结果是 $\{x_1\},\{x_2,x_3\}$. 令 $\lambda=0.4$

$$(e(\boldsymbol{R}))_{0.4}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

则相应分类结果是 $\{x_1,x_2,x_3\}$.

§4.8 模糊聚类

若 $\boldsymbol{R}$ 是有限论域 X 上的 F 等价关系,$\forall\lambda\in[0,1]$,对 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 进行分类,这样的动态分类方法称为模糊聚类,模糊聚类的步骤如下:

第一步:在论域 X 上建立一个 F 相似关系.

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是待分类的对象全体,每一个对象 $x_i\in X$ 有一组数据

$$\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}\}$$

用来描述 x_i 的特征. 利用普通聚类方法中的相似系数来建立 F 相似矩阵. $\forall x_i$, $x_j\in X$,用 r_{ij} 表示 x_i 和 x_j 之间的相似度,一般可以选用下列的一些方法,从而得相似矩阵

$$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$$

(1)最大最小法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\vee x_{jk})} \tag{4.109}$$

(2)算术平均最小法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}+x_{jk})} \tag{4.110}$$

(3)几何平均最小法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{x_{ik}x_{jk}}} \tag{4.111}$$

(4)相似系数法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-\bar{x}_i|\,|x_{jk}-\bar{x}_j|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}-\bar{x}_i)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{jk}-\bar{x}_j)^2}} \tag{4.112}$$

其中 $\bar{x}_i=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{ik}$, $\bar{x}_j=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{jk}$.

(5)指数相似系数法

$$r_{ij}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}e^{-\frac{4}{3}\frac{(x_{ik}-x_{jk})^2}{S_k^2}} \tag{4.113}$$

其中 $S_k=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ik}-\bar{x}_k)^2}$, $\bar{x}_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ik}$.

(6)绝对值指数法

$$r_{ij}=e^{-\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|} \tag{4.114}$$

(7)绝对值倒数法

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ \dfrac{C}{\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|}, & i\neq j\end{cases} \tag{4.115}$$

其中 $c\leqslant\min\left\{\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|\,i,j=1,2,\cdots,n\right\}$.

(8)绝对值减数法

$$r_{ij}=1-C\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}| \tag{4.116}$$

其中 C 为适当选择,使 $0\leqslant r_{ij}\leqslant 1$.

(9)夹角余弦法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}x_{ik}x_{jk}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}x_{ik}^{2}}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}x_{jk}^{2}}} \tag{4.117}$$

(10)数量积法

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ \dfrac{1}{c}\sum_{k=1}^{m}x_{ik}x_{jk}, & i\neq j\end{cases} \tag{4.118}$$

其中
$$c\geqslant \max\left\{\sum_{k=1}^{m}x_{ik}x_{jk}\mid i,j=1,2,\cdots,n\right\}.$$

(11)贴近度法

①格贴近度法

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ \left(\bigvee_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})\right)\wedge\left(1-\bigwedge_{k=1}^{m}(x_{ik}\vee x_{jk})\right), & i\neq j\end{cases} \tag{4.119}$$

②距离贴近度法

$$r_{ij}=1-C(d(x_i,x_j))^{\alpha} \tag{4.120}$$

其中 C 和 α 是适当选择的常数. 如欧氏距离 $d(x_i,x_j)=\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}-x_{jk})^2$, 取 $\alpha=\frac{1}{2}$.

(12)专家打分求平均值法(德尔菲法).

第二步:用平方法求 $\boldsymbol{R}$ 的传递闭包 $t(\boldsymbol{R})$,则 $t(\boldsymbol{R})$ 即为 $\boldsymbol{R}$ 的等价闭包 $e(\boldsymbol{R})$,通过 $e(\boldsymbol{R})$ 用 λ-截集对 X 进行动态分类.

例 4.8.1 环境单元分类. 设每个环境单元包括空气、水分、土壤、作物四个要素. 环境单元的污染状况由污染物在四个要素中的含量超限度来描述.

现有五个环境单元,这五个环境单元的污染数据如下:

设 $X=\{\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV},\mathrm{V}\}$ 为五个环境单元.

$\mathrm{I}=(5,5,3,2)$, $\mathrm{II}=(2,3,4,5)$, $\mathrm{III}=(5,5,2,3)$, $\mathrm{IV}=(1,5,3,1)$, $\mathrm{V}=(2,4,5,1)$

用绝对值减数法建立 F 相似关系,取 $c=0.1$ 得 F 相似矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.1 & 0.8 & 0.5 & 0.3\\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.4\\ 0.8 & 0.1 & 1 & 0.5 & 0.3\\ 0.5 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0.6\\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 1\end{pmatrix}$$

用平方法求传递闭包

$$R^2=\begin{pmatrix}1&0.3&0.8&0.5&0.5\\0.3&1&0.2&0.4&0.4\\0.8&0.2&1&0.5&0.3\\0.5&0.4&0.5&1&0.6\\0.5&0.4&0.3&0.6&1\end{pmatrix}$$

$$R^4=\begin{pmatrix}1&0.4&0.8&0.5&0.5\\0.4&1&0.4&0.4&0.4\\0.8&0.4&1&0.5&0.5\\0.5&0.4&0.5&1&0.6\\0.5&0.4&0.5&0.6&1\end{pmatrix}$$

由于 $R^8=R^4$，故 $e(R)=R^4$ 为 F 等价关系.

从例4.6.1知：

当 $0\leqslant\lambda\leqslant0.4$ 时，X 分为一类：{Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ}.

当 $0.4<\lambda\leqslant0.5$ 时，X 分为二类：{Ⅰ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ}，{Ⅱ}.

当 $0.5<\lambda\leqslant0.6$ 时，X 分为三类：{Ⅰ，Ⅲ}，{Ⅳ，Ⅴ}，{Ⅱ}.

当 $0.6<\lambda\leqslant0.8$ 时，X 分为四类：{Ⅰ，Ⅲ}，{Ⅱ}，{Ⅳ}，{Ⅴ}.

当 $0.8<\lambda\leqslant1$ 时，X 分为五类：{Ⅰ}，{Ⅱ}，{Ⅲ}，{Ⅳ}，{Ⅴ}.

下面介绍 F 图的最大树聚类法.

设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是 X 上的一个 F 关系. 以论域中的元素作顶点，$\forall x_i,x_j\in X$，用一条线段连接 x_i 和 x_j 构成图的边，在边上标上 r_{ij} 的值作为权重，当 $r_{ij}=0$ 时，x_i 和 x_j 之间无边，由此得到一个 n 个顶点，边数不大于 n^2 的带权图，由于每条边的权重 r_{ij} 满足 $0<r_{ij}\leqslant1$，所以这样的图称为 F 图.

设 R 是 X 上的一个 F 等价关系，在 X 的 n 个顶点之间按 r_{ij} 从大到小的顺序依次连接两个顶点 x_i 和 x_j，并加上权重 r_{ij}，若某一步出现回路，便不画这一步，直到所有顶点连通为止. 这样就得到一棵所谓的最大树. 取 λ 从小到大，每次取定 λ，去掉权重低于 λ 的边，互相连通的元素归为一类，由此便得 X 的动态分类.

例如，对例4.8.1中的 $e(R)$ 进行最大树法分类.

$$e(R)=\begin{pmatrix}1&0.4&0.8&0.5&0.5\\0.4&1&0.4&0.4&0.4\\0.8&0.4&1&0.5&0.5\\0.5&0.4&0.5&1&0.6\\0.5&0.4&0.5&0.6&1\end{pmatrix}$$

取 $\lambda=0.4$，无权重低于0.4的边，见图4.2，所以聚类结果：{Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ}.

取 $\lambda=0.5$，去掉权重低于0.5的边得图4.3，所以聚类结果：{Ⅰ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ}，{Ⅱ}.

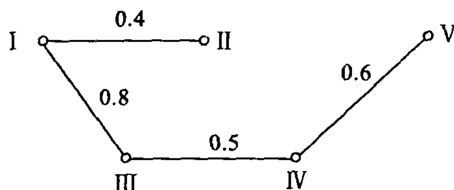


图 4.2

取 $\lambda=0.6$，去掉权重低于 0.6 的边得图 4.4，所以聚类结果：{Ⅰ，Ⅲ}，{Ⅱ}，{Ⅳ，Ⅴ}.

取 $\lambda=0.8$，去掉权重低于 0.8 的边得图 4.5，所以聚类结果：{Ⅰ，Ⅲ}，{Ⅱ}，{Ⅳ}，{Ⅴ}.

取 $\lambda>0.8$，得无边的图，见图 4.6，所以聚类结果：{Ⅰ}，{Ⅱ}，{Ⅲ}，{Ⅳ}，{Ⅴ}.

由此最大树法分类结果和例 4.8.1 完全一致.

这里需要说明的是，对相似矩阵 $\boldsymbol{R}$ 求传递闭包 $t(\boldsymbol{R})$ 后，对 $t(\boldsymbol{R})$ 进行聚类，因为$t(\boldsymbol{R})\supseteq\boldsymbol{R}$，所以分类的结果有时不是很理想. 有时我们可以不求 $\boldsymbol{R}$ 的传递闭包，而直接对 $\boldsymbol{R}$ 进行分类，同样可以得到一个较好的分类结果.

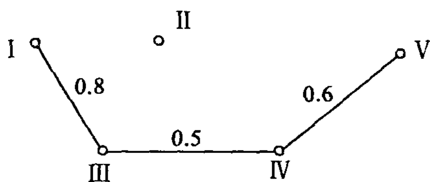


图 4.3

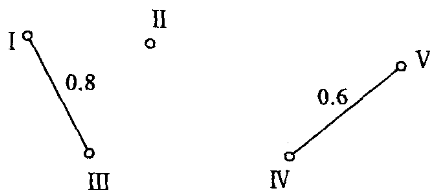


图 4.4

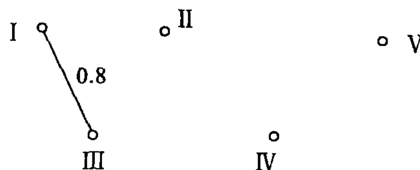


图 4.5

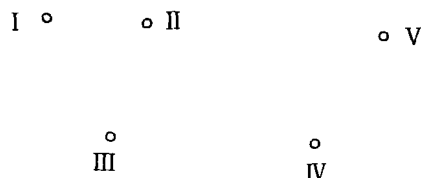


图 4.6

§4.9 模 糊 图

在经典图论中，一个图 G 是二元组(V,E)，其中 V 是图 G 的非空顶点集合，若

E 是无序积 $V\&V=\{\{x,y\}\mid x,y\in V\}$ 的多重子集，则称 E 为 G 的无向边，此时称 $G=(V,E)$ 为无向图. 若 E 是笛卡儿积 $V\times V=\{(x,y)\mid x,y\in V\}$ 的多重子集，则称 E 为 G 的有向边，此时称 $G=(V,E)$ 为有向图. 含平行边的图称为多重图，不含平行边也不含环的图称为简单图.

定义 4.9.1 设 $G=(V,E)$ 是无向图，$\tilde{V}:V\to[0,1]$，$\tilde{E}:E\to[0,1]$ 满足：$\forall e\in E$

$$\tilde{E}(e)\leqslant\tilde{V}(x)\wedge\tilde{V}(y)\tag{4.121}$$

其中 $e=\{x,y\}$ 是以 x 和 y 为端点的无向边.

称 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ 为模糊图，简称 F 图，称图 $G=(V,E)$ 为 $\tilde{G}$ 的基础图；若 G 是多重图，则称 $\tilde{G}$ 为多重 F 图，若 G 是简单图，则称 $\tilde{G}$ 为简单 F 图.

显然，F 图 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ 是约束 $\tilde{V}$ 上的 F 对称关系 $\tilde{E}$. 反之，若 $\tilde{E}$ 是约束 $\tilde{V}$ 的 F 对称关系，记

$$V=\{x\mid\tilde{V}(x)>0\}$$
$$E=\{e=\{x,y\}\mid x,y\in V\}$$

则 $\tilde{G}=[\tilde{V},\tilde{E}]$ 是基础图为 $G=(V,E)$ 的 F 图.

定理 4.9.1 图 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ 是 F 图的充分必要条件是任意的 $\lambda\in[0,1]$，$\tilde{G}_\lambda=(\tilde{V}_\lambda,\tilde{E}_\lambda)$ 是 $G=(V,E)$ 的子图.

其中
$$\tilde{V}_\lambda=\{x\mid\tilde{V}(x)\geqslant\lambda\},\quad\tilde{E}_\lambda=\{e\mid\tilde{E}(e)\geqslant\lambda\}\tag{4.122}$$

证明 设 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ 是 F 图，$\forall e=\{x,y\}\in\overline{E}_\lambda$ 有

$$\lambda\leqslant\tilde{E}(e)\leqslant\tilde{V}(x)\wedge\tilde{V}(y)$$

从而 $x\in\tilde{V}_\lambda\subseteq V$，$y\in\tilde{V}_\lambda\subseteq V$，即 $(\tilde{V}_\lambda,\tilde{E}_\lambda)$ 是 $G=(V,E)$ 的子图.

反之，若 $\forall\lambda\in[0,1]$，$(\tilde{V}_\lambda,\tilde{E}_\lambda)$ 是 G 的子图，则 $\forall e\in E$，$(\tilde{V}_{\tilde{E}(e)},\tilde{E}_{\tilde{E}(e)})$ 是 G 的子图，由于 $e=\{x,y\}\in\tilde{E}_{\tilde{E}(e)}$，则 $x\in\tilde{V}_{\tilde{E}(e)}$，$y\in\tilde{V}_{\tilde{E}(e)}$，故 $\tilde{V}(x)\geqslant\tilde{E}(e)$，$\tilde{V}(y)\geqslant\tilde{E}(e)$，故

$$\tilde{E}(e)\leqslant\tilde{V}(x)\wedge\tilde{V}(y)$$

所以 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ 是 F 图.

定义 4.9.2 设 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ 是 F 图，则 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\tilde{G}_\lambda=(\tilde{V}_\lambda,\tilde{E}_\lambda)$ 称为 $\tilde{G}$ 的 λ 割图.

定义 4.9.3 设 $G_1=(V_1,E_1)$ 是 $G=(V,E)$ 的子图，则称 $\tilde{G}_1=(\tilde{V}_1,\tilde{E}_1)$ 为 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ 的 F 子图，若满足，$V_1\subseteq\tilde{V}$，$\tilde{E}_1\subseteq\tilde{E}$.

定义 4.9.4 设 $\tilde{G}_1=(\tilde{V}_1,\tilde{E}_1)$ 和 $\tilde{G}_2=(\tilde{V}_2,\tilde{E}_2)$ 是 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ 的 F 子图，定义：

(1) $\tilde{G}_1$ 和 $\tilde{G}_2$ 的并图 $\tilde{G}_1\cup\tilde{G}_2$ 为

$$\tilde{G}_1\cup\tilde{G}_2=(\tilde{V}_1\cup\tilde{V}_2,\tilde{E}_1\cup\tilde{E}_2) \tag{4.123}$$

其中

$$(\tilde{V}_1\cup\tilde{V}_2)(x)=\tilde{V}_1(x)\vee\tilde{V}_2(x) \tag{4.124}$$

$$(\tilde{E}_1\cup\tilde{E}_2)(e)=\tilde{E}_1(e)\vee\tilde{E}_2(e) \tag{4.125}$$

而且基础图 $G_1\cup G_2$ 为

$$G_1\cup G_2=(V_1\cup V_2,E_1\cup E_2) \tag{4.126}$$

(2) $\tilde{G}_1$ 和 $\tilde{G}_2$ 的交图 $\tilde{G}_1\cap\tilde{G}_2$ 为

$$\tilde{G}_1\cap\tilde{G}_2=(\tilde{V}_1\cap\tilde{V}_2,\tilde{E}_1\cap\tilde{E}_2) \tag{4.127}$$

其中

$$(\tilde{V}_1\cap\tilde{V}_2)(x)=\tilde{V}_1(x)\wedge\tilde{V}_2(x) \tag{4.128}$$

$$(\tilde{E}_1\cap\tilde{E}_2)(e)=\tilde{E}_1(e)\wedge\tilde{E}_2(e) \tag{4.129}$$

而且 $\tilde{G}$ 的基础图 $G_1\cap G_2$ 为

$$G_1\cap G_2=(V_1\cap V_2,E_1\cap E_2) \tag{4.130}$$

定理 4.9.2 设 G_1 和 G_2 是 G 的 F 子图，则 $\forall\lambda\in[0,1]$，有：

(1)
$$(\tilde{G}_1\cup\tilde{G}_2)_\lambda=(\tilde{G}_1)_\lambda\cup(\tilde{G}_2)_\lambda \tag{4.131}$$

(2)
$$(\tilde{G}_1\cap\tilde{G}_2)_\lambda=(\tilde{G}_1)_\lambda\cap(\tilde{G}_2)_\lambda \tag{4.132}$$

证明 (1) 由于 $x\in(\tilde{V}_1\cup\tilde{V}_2)_\lambda\Leftrightarrow\tilde{V}_1(x)\vee\tilde{V}_2(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow\tilde{V}_1(x)\geqslant\lambda$ 或 $\tilde{V}_2(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow x\in(\tilde{V}_1)_\lambda$ 或 $x\in(\tilde{V}_2)_\lambda\Leftrightarrow x\in(\tilde{V}_1)_\lambda\cup(\tilde{V}_2)_\lambda$，故

$$(\tilde{V}_1\cup\tilde{V}_2)_\lambda=(\tilde{V}_1)_\lambda\cup(\tilde{V}_2)_\lambda.$$

同理 $e\in(\tilde{E}_1\cup\tilde{E}_2)_\lambda\Leftrightarrow e\in(\tilde{E}_1)_\lambda\cup(\tilde{E}_2)_\lambda$，则

$$(\tilde{E}_1\cup\tilde{E}_2)_\lambda=(\tilde{E}_1)_\lambda\cup(\tilde{E}_2)_\lambda.$$

所以

$$(\tilde{G}_1\cup\tilde{G}_2)_\lambda=(\tilde{G}_1)_\lambda\cup(\tilde{G}_2)_\lambda.$$

同理证明

$$(\tilde{G}_1\cap\tilde{G}_2)_\lambda=(\tilde{G}_1)_\lambda\cap(\tilde{G}_2)_\lambda.$$

定理4.9.3 设 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ 是 F 图,则

$$\tilde{G}=\bigcup_{\lambda\in T}\lambda\tilde{G}_{\lambda} \tag{4.133}$$

其中

$$T=\{\tilde{V}(x)\mid x\in V\}\cup\{\tilde{E}(e)\mid e\in E\} \tag{4.134}$$

$$\lambda\tilde{G}_{\lambda}=(\lambda\tilde{V}_{\lambda},\lambda\tilde{E}_{\lambda}) \tag{4.135}$$

证明 因为 $\bigcup_{\lambda\in T}\lambda\tilde{G}_{\lambda}=(\bigcup_{\lambda\in T}\lambda\tilde{V}_{\lambda},\bigcup_{\lambda\in T}\lambda\tilde{E}_{\lambda})$

又因为 T 是不含0的有限集,令 $\lambda_0=\min\{\lambda\mid\lambda\in T\}$,则当 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时有

$$(\bigcup_{\lambda\in T}\lambda\tilde{V}_{\lambda})(x)=\bigvee_{x\in\tilde{V}_{\lambda}}\lambda=\bigvee_{\lambda\leqslant\tilde{V}(x)}\lambda=\tilde{V}(x)$$

$$(\bigcup_{\lambda\in T}\lambda\tilde{E}_{\lambda})(e)=\bigvee_{e\in\tilde{E}_{\lambda}}\lambda=\bigvee_{\lambda\leqslant\tilde{E}(e)}\lambda=\tilde{E}(e)$$

所以

$$\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})=(\bigcup_{\lambda\in T}\lambda\tilde{V}_{\lambda},\bigcup_{\lambda\in T}\lambda\tilde{E}_{\lambda})=\bigcup_{\lambda\in T}\lambda\tilde{G}_{\lambda}.$$

推论4.9.1 设 $\tilde{G}_1$ 和 $\tilde{G}_2$ 是 $\tilde{G}$ 的 F 子图,则 $\tilde{G}_1=\tilde{G}_2$ 的充分必要条件是 $\forall\lambda\in[0,1]$,$(\tilde{G}_1)_{\lambda}=(\tilde{G}_2)_{\lambda}$.

定义4.9.5 设 $\tilde{G}$ 是 F 图,若 $\tilde{G}$ 的基础图 G 是连通图,则称 $\tilde{G}$ 是连通 F 图.

定义4.9.6 设 $\tilde{G}$ 是 F 图,G 是 $\tilde{G}$ 的基础图,T 是 G 的生成树,若 $\tilde{G}$ 中存在 F 子图 $\tilde{T}\subseteq\tilde{G}$,使得 $\tilde{T}$ 的基础图是 T,则称 $\tilde{T}$ 是 F 图 $\tilde{G}$ 的 F 生成树.

用 $T(\tilde{G})$ 表示 $\tilde{G}$ 的 F 生成树全体.用 $E(\tilde{T})$ 表示树 $\tilde{T}$ 的边全体,用 $V(\tilde{T})$ 表示树 $\tilde{T}$ 中顶点全体.

定义4.9.7 设 $\tilde{G}=(\tilde{E},\tilde{V})$ 是连通 F 图,若存在 $\tilde{T}^*\in T(\tilde{G})$,使得 $\forall T\in T(\tilde{G})$,有

$$\sum_{e\in E(\tilde{T})}\tilde{E}(e)\leqslant\sum_{e\in E(\tilde{T}^*)}\tilde{E}(e) \tag{4.136}$$

则称 $\tilde{T}^*$ 为 $\tilde{G}$ 的最大生成树.

例4.9.1 设 F 图 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$(如图4.7),其中

$$\tilde{V}=\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_4}$$

$$\tilde{E}=\frac{0.7}{\{v_1,v_2\}}+\frac{0.1}{\{v_1,v_3\}}+\frac{0.6}{\{v_3,v_4\}}+\frac{0.5}{\{v_3,v_2\}}+\frac{0.4}{\{v_2,v_4\}}$$

图 4.8、图 4.9 是图 4.7 的生成树，图 4.9 是最大生成树.

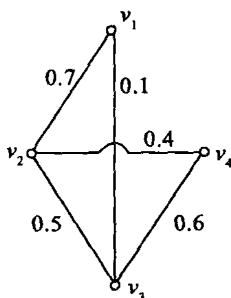


图 4.7

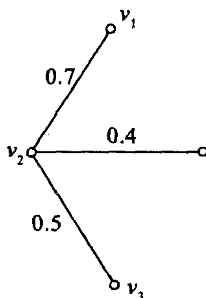


图 4.8

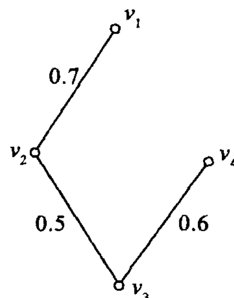


图 4.9

定义 4.9.8 设 $L(v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k})$ 是 F 图 $\tilde{G}$ 中从顶点 v_{i_1} 到 v_{i_k} 的一条路，路 L 的连通强度定义为

$$S(L)=\bigwedge_{j=1}^{k-1}\tilde{E}(\{v_{i_j},v_{i_{j+1}}\}) \tag{4.137}$$

顶点 V_{i_1} 到 V_{i_k} 的连通强度定义为

$$S(v_{i_1},v_{i_k})=\bigvee_{L\in L(v_{i_1}-v_{i_k})}S(L) \tag{4.138}$$

其中 $L(v_{i_l}-v_{i_k})$ 表示从 v_{i_1} 到 v_{i_k} 的所有通路.

定理 4.9.4 设 $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ 是连通的 F 图，$\tilde{G}$ 的生成树 $\tilde{T}$ 是最大生成树的充分必要条件是对于任意的 $u,v\in V(u\neq v)$，在 u 和 v 之间只存在唯一一条路 $L\in\tilde{T}$，使

$$S(u,v)=S(L).$$

证明 必要性，设 $\tilde{T}$ 是 $\tilde{G}$ 的最大生成树，$L(u,v_1,\cdots,v_{n-1},v)$ 是 $\tilde{T}$ 中从 u 到 v 的一条通路，并设 $e_i=\{v_{i-1},v_i\}$，则

$$S(L)=\bigwedge_{i=1}^{n}\tilde{E}(e_i)$$

则存在 $e_j(j\leqslant n)$ 使得 $S(L)=\tilde{E}(e_j)$，因为 $S(u,v)=\bigvee_{L\in L(u-V)}S(L)$，则

$$S(L)\leqslant S(u,v).$$

假若 $S(u,v)>S(L)$，则 $\tilde{G}$ 中还存在另一条从 u 到 v 的路 $L'(u,v'_1,\cdots,v'_m,v)$，$[v'_{j-1},v'_j]=e'_j$，使得 $S(L')=S(u,v)$. 则 $S(L')>S(L)=E(e_j)$，从而 L' 不可能通

过 e_j,在 $\tilde{T}$ 中去掉 e_j,则变为两棵树 $\tilde{T}_1$ 和 $\tilde{T}_2$,即

$$\tilde{T} - \{e_j\} = \tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2$$

其中 $u \in V(\tilde{T}_1), v \in V(\tilde{T}_2)$.

设 $\tilde{G}$ 中一个端点在 $V(\tilde{T}_1)$ 中,另一个端点在 $V(\tilde{T}_2)$ 中的边集合为 E',则 L' 中存在 $e'_k \in E'$,且 $\tilde{E}(e'_k) \geqslant S(L') > E(e_j)$,在 $\tilde{T} - \{e_j\} = \tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2$ 中补上 e'_k,则形成一棵新树 T',即

$$T' = (T - \{e_j\}) \cup \{e'_k\} = \tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2 \cup \{e'_k\}$$

则

$$\sum_{e \in E(T')} \tilde{E}(e) > \sum_{e \in E(T')} \tilde{E}(e)$$

由此 $\tilde{T}$ 不是 $\tilde{G}$ 的最大生成树,这与假设矛盾,故 $S(u,v) = S(L)$.

充分性,任取 $u,v \in V$,设 u 和 v 之间唯一存在一条路 L,使 $S(u,v) = S(L)$,则 $S(u,v) = S(l) \geqslant S(L_i)$,令

$$S(L) = E(e^*), S(L_i) = E(e)$$

则
$$E(e^*) \geqslant E(e).$$

设 $e \in E(\tilde{T}'), e^* \in E(\tilde{T})$,则

$$\sum_{e \in E(\tilde{T}')} \tilde{E}(e) \leqslant \sum_{e^* \in E(\tilde{T})} \tilde{E}(e^*)$$

所以 T 是最大生成树.

例 4.9.2 设 $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$,其中

$$\tilde{V} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_5}$$

$$\tilde{E} = \frac{0.85}{\{v_1,v_2\}} + \frac{0.65}{\{v_1,v_3\}} + \frac{0.25}{\{v_1,v_4\}} + \frac{0.15}{\{v_1,v_5\}} + \frac{0.85}{\{v_2,v_3\}} + \frac{0.25}{\{v_2,v_5\}} + \frac{0.95}{\{v_3,v_4\}} + \frac{0.15}{\{v_4,v_5\}}$$

求 $\tilde{G}$ 的最大生成树.

解 如图4.10为 $\tilde{G}$ 的 F 图. 用破圈法求得 $\tilde{G}$ 的最大生成树 T^*(如图4.11). 最大树 T^* 的最大权重 $d(T^*)$ 为

$$d(T^*) = 0.85 + 0.85 + 0.95 + 0.25 = 2.9.$$

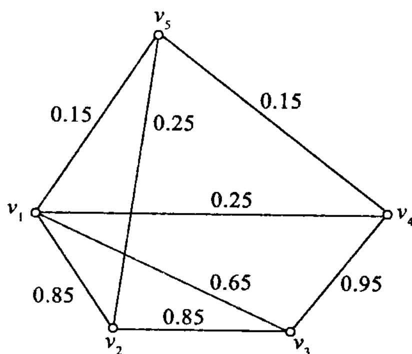


图 4.10

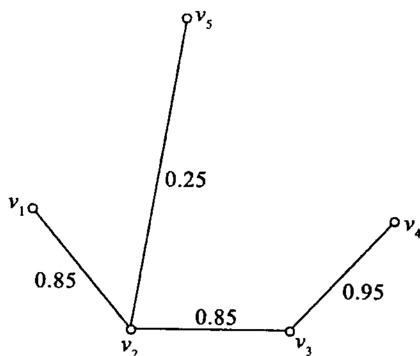


图 4.11

§4.10 模糊变换与综合评判

定义 4.10.1 设 $R \in F(X \times Y)$, $\forall x \in X, y \in Y$,记

$$R_X(x) = \bigvee_{y \in Y} R(x,y) \tag{4.139}$$

$$R_Y(y) = \bigvee_{x \in X} R(x,y) \tag{4.140}$$

则称 R_X 为 R 在 X 上的投影,R_Y 为 R 在 Y 上的投影.

显然 $R_X \in F(X)$,$R_Y \in F(Y)$. 特别地,若 $R \in P(X \times Y)$,则

$$R_X = \{x \mid \exists y \in Y, (x,y) \in R\}$$

$$R_Y = \{y \mid \exists x \in X, (x,y) \in R\}$$

且 $R_X \subseteq X$,$R_Y \subseteq Y$,如图 4.12 所示.

定义 4.10.2 设 $R \in F(X \times Y)$, $\forall x \in X, y \in Y$,记

$$R|_x(y) = R(x,y) \tag{4.141}$$

$$R|_y(x) = R(x,y) \tag{4.142}$$

则称 $R|_x$ 为 R 在 x 处的截影,$R|_y$ 为 R 在 y 处的截影。

显然,$R|_x \in F(Y)$,$R|_y \in F(X)$. 特别地,若 $R \in P(X \times Y)$,则

$$R|_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in R\}$$

$$R|_y = \{x \in X \mid (x,y) \in R\}$$

且 $R|_x \subseteq Y$,$R|_y \subseteq X$,如图 4.13 所示.

定理 4.10.1 设 $R \in F(X \times Y)$,则:

(1)
$$R_X = \bigcup_{y \in Y} R|y \tag{4.143}$$

(2)
$$R_Y = \bigcup_{x \in X} R|x \tag{4.144}$$

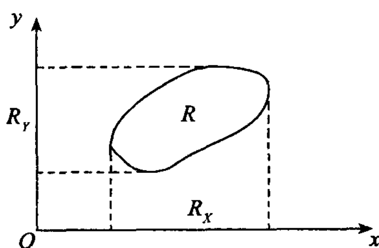


图 4.12

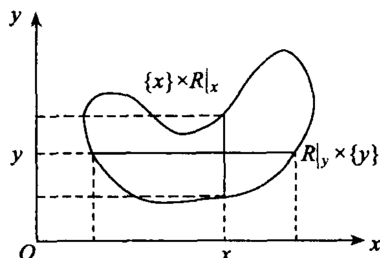


图 4.13

证明　(1)因为

$$R_X(x)=\bigvee_{y\in Y}R(x,y)=\bigvee_{y\in Y}R\mid y(x)=(\bigcup_{y\in Y}R\mid y)(x)$$

故 $R_X=\bigcup_{y\in Y}R\mid y$. 同理证明(2).

定理 4.10.2　设 $R\in F(X\times Y)$，则：

(1)
$$R=\bigcup_{x\in X}(\{x\}\times R\mid x)\tag{4.145}$$

(2)
$$R=\bigcup_{y\in Y}(R\mid y\times\{y\})\tag{4.146}$$

证明　(1) $\forall(x_1,y_1)\in X\times Y$

$$\{\bigcup_{x\in X}(\{x\})\times R\mid x)\}(x_1,y_1)=\bigvee_{x\in X}(\{x\}\times R\mid x)(x_1,y_1)$$
$$=\bigvee_{x\in X}(\{x\}(x_1)\wedge R\mid x(y_1)=\{x_1\}(x_1)\wedge R(x_1,y_1)=R(x_1,y_1)$$

故 $\bigcup_{x\in X}(\{x\}\times R\mid x)=R$. 同理证明(2).

定理 4.10.3　设 $R\in F(X\times Y)$，$\forall x\in X,y\in Y$，则：

(1)
$$R\mid x=((\{x\}\times Y)\cap R)_Y\tag{4.147}$$

(2)
$$R\mid y=((X\times\{y\})\cap R)_X\tag{4.148}$$

证明　(1)因为

$$((\{x\}\times Y)\cap R)_Y(y)=\bigvee_{x'\in X}(\{x\}\times Y)\cap R)(x',y)$$
$$=\bigvee_{x'\in X}((\{x\}\times Y)(x',y)\wedge R(x',y))$$
$$=\bigvee_{x'\in X}(\{x\}(x')\wedge Y(y)\wedge R(x',y))$$
$$=\{x\}(x)\wedge R(x,y)=R(x,y)=R\mid x(y)$$

故 $R\mid x=((\{x\}\times Y)\cap R)_Y$. 同理证明(2).

定理 4.10.4　设 $R,Q\in F(X\times Y)$，若 $R\subseteq Q$，则：

(1)
$$R_X\subseteq Q_X,R_Y\subseteq Q_Y\tag{4.149}$$

(2)
$$R\mid_x\subseteq Q\mid_x,R\mid_y\subseteq Q\mid_y\tag{4.150}$$

定理结论直接由定义 4.10.1 和定义 4.10.2 可得.

例 4.10.1　设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$，$\boldsymbol{R}\in F(X\times Y)$为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.3 & 0.6 & 0.7 & 0.8\\ 0.4 & 1 & 0.3 & 0.5\\ 0.7 & 0.5 & 0.9 & 0\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{R}_X=\begin{pmatrix}0.8\\ 1\\ 0.9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}_Y=(0.7,1,0.9,0.8)$$

$$\boldsymbol{R}\mid x_1=(0.3,0.6,0.7,0.8)$$

$$\boldsymbol{R}\mid x_2=(0.4,1,0.3,0.5)$$

$$\boldsymbol{R}\mid x_3=(0.7\quad 0.5\quad 0.9\quad 0)$$

$$\boldsymbol{R}\mid y_1=\begin{pmatrix}0.3\\ 0.4\\ 0.7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}\mid y_2=\begin{pmatrix}0.6\\ 1\\ 0.5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}\mid y_3=\begin{pmatrix}0.7\\ 0.3\\ 0.9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}\mid y_4=\begin{pmatrix}0.8\\ 0.5\\ 0\end{pmatrix}.$$

定义 4.10.3 设 X,Y 是集合，映射 $f:X\to F(Y)$ 称为 X 到 Y 的模糊集值映射，简称为 F 映射.

定理 4.10.5 设 $R\in F(X\times Y)$，则 $\forall x\in X$，截影 $R\mid x$ 决定了一个从 X 到 Y 的 F 映射 f_R，$\forall x\in X$

$$f_R(x)=R\mid_x \tag{4.151}$$

若 $f:X\to F(Y)$ 是一个 F 映射，则 f 唯一确定一个 F 关系 $R_f\in F(X\times Y)$，$\forall(x,y)\in X\times Y$

$$R_f(x,y)=f(x)(y) \tag{4.152}$$

证明 因为 $\forall y\in Y, R\mid x(y)=R(x,y)$，则截影 $R\mid x$ 是 Y 中的一个 F 集，所以 f_R 是 X 到 Y 的一个 F 映射.

反之，因为 $\forall x\in X$, $f(x)\in F(Y)$，则 $\forall y\in Y$, $f(x)(y)=R_f(x,y)\in[0,1]$，故 R_f 是 X 到 Y 的一个 F 关系.

例 4.10.2 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$，$\boldsymbol{R}\in F(X\times Y)$ 为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{R}$ 决定了一个 F 映射 $f_R:X\to F(Y)$，$\forall x_i\in X$

$$f(x_i)=(r_{i_1},r_{i_2},\cdots,r_{i_m})$$

设 F 映射 $f:X\to F(Y)$ 为 $\forall x_i\in X$

$$f(x_i)=(r_{i_1},r_{i_2},\cdots,r_{i_m})$$

则 f 决定了一个 F 关系 $\boldsymbol{R}_f$

$$R_f=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix}.$$

例 4.10.3 $\mathbf{R}$ 是实数集,设 $f:\mathbf{R}\to F(\mathbf{R})$,且 $\forall x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}$

$$f(x)(y)=\mathrm{e}^{-(x-y)^2}$$

确定 F 关系 R_f,并求 $R_f|_{x=2}, R_f|_{y=3}$.

解 由定理4.10.5知,$R_f(x,y)=f(x)(y)$,故 $R_f(x,y)=\mathrm{e}^{-(x-y)^2}$. 由此

$$R_f|_{x=2}=\mathrm{e}^{-(2-y)^2},\quad R_f|_{y=3}=\mathrm{e}^{-(x-3)^2}.$$

定义 4.10.4 设 X,Y 是集合,映射

$$T:F(X)\to F(Y), A\to T(A)\triangleq B\quad (A\in F(X))$$

则称 T 是 X 到 Y 的一个模糊变换,简称 F 变换;称 B 是 A 在 T 变换下的像,A 是 B 的原像.

特别地,$T:P(X)\to P(Y), A\to T(A)\triangleq B$ 是 X 到 Y 的集变换.

定理 4.10.6 设 $R\in F(X\times Y)$, $\forall A\in F(X)$,令

$$T_R(A)=((A\times Y)\cap R)_Y \tag{4.153}$$

则 T_R 是 X 到 Y 的一个 F 变换,称为由 R 诱导的 F 变换.

证明 $\forall y\in Y$

$$\begin{aligned} T_R(A)(y)&=((A\times Y)\cap R)_Y(y)=\bigvee_{x\in X}((A\times Y)\cap R)(x,y)\\ &=\bigvee_{x\in X}((A\times Y)(x,y)\wedge R(x,y))=\bigvee_{x\in X}(A(x)\wedge Y(y)\wedge R(x,y))\\ &=\bigvee_{x\in X}(A(x)\wedge R(x,y))\triangleq A\circ R(y)\end{aligned}$$

故 $T_R(A)\in F(Y)$,即 $T_R(A)=A\circ R$ 是 X 到 Y 的一个 F 变换.

推论 4.10.1 设 $R\in F(X\times Y)$, $\forall A\in F(X)$,则 $A\circ R$ 是 X 到 Y 的一个 F 变换,亦称 $A\circ R$ 为 A 和 R 的合成. 其中,$\forall y\in Y$

$$(A\circ R)(y)=\bigvee_{x\in X}(A(x)\wedge R(x,y)) \tag{4.154}$$

例 4.10.4 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$, $R\in F(X\times Y)$ 为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.9 & 1 \\ 0 & 0.4 & 1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}=(0.5,0.1,0.3)\in F(X)$,求 $T_R(A)$.

解

$$T_R(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}=(0.5,0.1,0.3)\circ\begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.9 & 1 \\ 0 & 0.4 & 1 & 0.1 \end{pmatrix}=(0.2,0.5,0.5,0.1).$$

由此可见,集合 X 到 Y 的一个 F 关系 R 和 X 中的一个 F 集 A 的合成 $A\circ R=T_R(A)$ 将 X 中的一个 F 集变换为 Y 中的一个 F 集,这表现为 F 概念在不同论域中的转化.

定义 4.10.5 设 $A,B\in F(X)$,若 F 变换 $T:F(X)\to F(Y)$,满足:

(1) $$T(A\cup B)=T(A)\cup T(B) \tag{4.155}$$

(2) $$\forall\lambda\in[0,1]\quad T(\lambda A)=\lambda T(A) \tag{4.156}$$

则称 T 是一个 F 线性变换. 其中 $(\lambda A)(x)=\lambda\wedge A(x)$.

定理 4.10.7 设 $R\in F(X\times Y)$, $\forall A\in F(X)$,则

$$T_R(A)=A\circ R \tag{4.157}$$

是一个 F 线性变换.

证明 因为

$$T_R(A\cup B)=(A\cup B)\circ R=A\circ R\cup B\circ R=T_R(A)\cup T_R(B)$$

又因为 $T_R(\lambda A)=(\lambda A)\circ R$,故 $\forall y\in Y$

$$\begin{aligned}T_R(\lambda A)(y)&=((\lambda A)\circ R)(y)=\bigvee_{x\in X}((\lambda A)(x)\wedge R(x,y))\\&=\bigvee_{x\in X}(\lambda\wedge A(x)\wedge R(x,y))=\lambda\wedge(\bigvee_{x\in X}(A(x)\wedge R(x,y))\\&=\lambda\wedge(A\circ R)(y)=(\lambda T_R(A))(y)\end{aligned}$$

所以 $$T_R(\lambda A)=\lambda T_R(A).$$

推论 4.10.2 设 $R\in F(X\times Y)$, $\{A^{(r)}\mid r\in T\}\subseteq F(X)$, $\{\lambda_r\mid r\in T\}\subseteq[0,1]$,则

$$T_R(\bigcup_{r\in T}\lambda_r A^r)=\bigcup_{r\in T}\lambda_r T_r(A^{(r)}) \tag{4.158}$$

证明 因为

$$\begin{aligned}T_R(\bigcup_{r\in T}\lambda_r A^r)&=(\bigcup_{r\in T}\lambda_r A^{(r)})oR=\bigcup_{r\in T}((\lambda_r A^{(r)})\circ R)\\&=\bigcup_{r\in T}T_R(\lambda_r A^{(r)})=\bigcup_{r\in T}\lambda_r T_R(A^{(r)})\end{aligned}$$

所以 $$T_R(\bigcup_{r\in T}\lambda_r A^{(r)})=\bigcup_{r\in T}\lambda_r T_R(A^{(r)}).$$

应用定理 4.10.5 的一个 F 映射决定一个 F 关系 R_f 的原理,和应用推论 4.10.1的一个 F 关系和一个 F 集的合成决定一个 F 变换 T_{Rf} 的原理,我们可以得到下列的综合评判模型.

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是因素集, $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$ 是决策集,已知 f 映射: $X\to F(X)$(称为单因素决策) $\forall x_i\in X$, $f(x_i)=(r_{i_1},r_{i_2},\cdots,r_{i_m})\in F(X)$. 则 f 诱导一个 F 关系, $\boldsymbol{R}_f\in F(X\times Y)$

$$\boldsymbol{R}_f=\begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}&\cdots&r_{1m}\\r_{21}&r_{22}&\cdots&r_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\r_{n1}&r_{n2}&\cdots&r_{nm}\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{R}_f$ 又诱导一个 F 变换 $T_{Rf}: F(X) \to F(Y)$, $\forall A \in F(X)$

$$T_{Rf}(A) = A \circ \boldsymbol{R}_f \triangleq B \in F(Y)$$

则 B 是决策集 Y 中的一个 F 集,根据最大隶属原则可以得到一个评判结果.

例 4.10.5 服装评判模型.

设 $X = \{x_1, x_2, x_3\} = \{$花色式样,耐穿程度,价格$\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{$很喜欢,比较喜欢,不太喜欢,不喜欢$\}$.

请专门人才或顾客对某种服装作单因素决策,若对花色式样有70%的人喜欢,有20%的人较喜欢,有10%的人不太喜欢,无人不喜欢,则对 x_1 的单因素决策结果为

$$x_1 \to (0.7, 0.2, 0.1, 0)$$

同理对耐穿程度和价格作单因素决策,结果为

$$x_2 \to (0.2, 0.4, 0.3, 0.1)$$

$$x_3 \to (0.1, 0.3, 0.4, 0.2)$$

则得到一个 F 关系 $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

若某顾客对花色式样、耐穿程度和价格三种因素的权重分配为

$$\boldsymbol{A} = (0.5, 0.3, 0.2)$$

则由 F 变换 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{R}$ 的综合评判结果

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{R} = (0.5, 0.3, 0.2) \circ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} = (0.5, 0.3, 0.3, 0.2)$$

因为 $\boldsymbol{B}(y_1) = 0.5$ 最大,所以根据最大隶属原则,该顾客对这类服装很喜欢.

§4.11 L 型模糊关系

定义 4.11.1 设 $(L, \leqslant)$ 是格,若 $R \in F_L(X \times Y)$,则称 R 为 X 到 Y 的 L 型模糊关系,简称为 L—F 关系.

定义 4.11.2 设 $R, S \in F_L(X \times Y)$, $\forall (x,y) \in X \times Y$,定义

(1) $$R \subseteq S \Leftrightarrow R(x,y) \leqslant S(x,y) \tag{4.159}$$

(2) $$R = S \Leftrightarrow R(x,y) = S(x,y) \tag{4.160}$$

定义 4.11.3 设 $R, S \in F_L(X \times Y)$, $\forall (x,y) \in X \times Y$,定义

(1) $$(R \cup S)(x,y) = R(x,y) \vee S(x,y) \tag{4.161}$$

(2) $$(R \cap S)(x,y) = R(x,y) \wedge S(x,y) \tag{4.162}$$

(3) $$R^{-1}(y,x) = R(x,y) \tag{4.163}$$

分别称为 R 和 S 的并关系、交关系和 R 的逆关系.

定理 4.11.1 设 $R,S\in F_L(X\times Y)$,则:

(1) $$R\subseteq S\Leftrightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1} \tag{4.164}$$

(2) $$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1} \tag{4.165}$$

(3) $$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1} \tag{4.166}$$

(4) $$(R^{-1})^{-1}=R \tag{4.167}$$

证明与定理 4.1.1 类似,从略.

定义 4.11.4 设 L 是完备格,$R\in F_L(X\times Y)$,$S\in F_L(Y\times Z)$,$\forall (x,z)\in X\times Z$,定义

$$(R\circ S)(x,z)=\bigvee_{y\in Y}(R(x,y)\wedge S(y,z)) \tag{4.168}$$

$R\circ S$ 称为 R 和 S 的合成关系.

以下均假定 L 是无穷可分配的完备格.

定理 4.11.2 设 $R,R_1,R_2\in F_L(X\times Y)$,$S,S_1,S_2\in F_L(Y\times Z)$,$Q\in F_L(Z\times W)$,则:

(1) $$(R\circ S)\circ Q=R\circ(S\circ Q) \tag{4.169}$$

(2) $$R\circ(S_1\cup S_2)=R\circ S_1\cup R\circ S_2 \tag{4.170}$$

$$(R_1\cup R_2)\circ S=R_1\circ S\cup R_2\circ S \tag{4.171}$$

(3) $$R\circ(S_1\cap S_2)\subseteq(R\circ S_1)\cap R\circ S_2 \tag{4.172}$$

$$(R_1\cap R_2)\circ S\subseteq R_1\circ S\cap R_2\circ S \tag{4.173}$$

(4) $$R_1\subseteq R_2,\text{则 } R_1\circ S\subseteq R_1\circ S \tag{4.174}$$

$$S_1\subseteq S_2,\text{则 } R\circ S_1\subseteq R\circ S_2 \tag{4.175}$$

(5) $$R\circ I_Y=I_X\circ R=R \tag{4.176}$$

$$R\circ O_Y=O_X\circ R=0 \tag{4.177}$$

(6) $$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1} \tag{4.178}$$

其中 $$I_X(x,y)=\begin{cases}1, & x=y\\ 0, & x\neq y\end{cases},\quad O_X(x,y)=0(\forall x,y\in X)$$

证明与定理 4.1.3 类似,从略.

一般地,$R\in F(X\times Y)$,$\{R_t\mid t\in T\}\subseteq F(X\times Y)$,$S\in F(Y\times Z)$,$\{S_t\mid t\in T\}\subseteq F(Y\times Z)$,则

(7) $$R\circ(\bigcup_{t\in T}S_t)=\bigcup_{t\in T}(R\circ S_t) \tag{4.179}$$

(8) $$(\bigcup_{t\in T}R_t)\circ S=\bigcup_{t\in T}(R_t\circ S) \tag{4.180}$$

定义 4.11.5 设 $R\in F_L(X\times X)$,定义

$$R^n=R^{n-1}\circ R\quad(n\in\mathbf{N}) \tag{4.181}$$

则称 R^n 为 R 的 n 次幂.

定理 4.11.3 设 $R,S\in F_L(X\times X)$,则:

(1)　$R\subseteq S$,则 $\forall n\in\mathbf{N}, R^n\subseteq S^n$　(4.182)

(2)　$R^k\circ R^l=R^{k+l}\quad(k,l\in\mathbf{N})$　(4.183)

(3)　$(R^n)^{-1}=(R^{-1})^n$　(4.184)

证明与定理 4.1.4 类似,从略.

定义 4.11.6　设 $R\in F_L(X\times X)$.

(1)若 $I_X\subseteq R$,则称 R 是 L—F 自反关系;

(2)若 $R=R^{-1}$,则称 R 是 L—F 对称关系;

(3)若 $R^2\subseteq R$,则称 R 是 L—F 传递关系.

定理 4.11.4　设 $R\in F_L(X\times X)$,若 R 是 F 自反关系,则 $R^n\subseteq R^{n+1}$,且 R^n 是 F 自反关系.

证明　$R^n\subseteq R^{n+1}$的证明与定理 4.2.2 类似. 又因 $I_x\subseteq R\subseteq R^n$,故 R^n 是 F 自反的.

定理 4.11.5　设 R、$S\in F_L(X\times X)$,若 R 和 S 是 F 对称的,则 $R\circ S$ 对称的充分必要条件是 $R\circ S=S\circ R$.

证明与定理 4.2.4 类似,从略.

推论 4.11.1　设 $R\in F_L(X\times X)$,若 R 是 F 对称的,则 R^n 是 F 对称的.

定理 4.11.6　设 $R\in F_L(X\times X)$,若 R 是 F 传递的,则 R^n 是 F 传递的.

证明　由于 $R^2\subseteq R$,则$(R^n)^2=(R^2)^n\subseteq R^n$,所以 R^n 是 F 传递的.

定理 4.11.7　设$\{R_t\mid t\in T\}\in F_L(X\times X)$.

(1)若 $\forall t\in T, R_t$ 是 F 自反的,则 $\bigcup_{t\in T}R_t$, $\bigcap_{t\in T}R_t$ 是 F 自反的;

(2)若 $\forall t\in T, R_t$ 是 F 对称的,则 $\bigcup_{t\in T}R_t$, $\bigcap_{t\in T}R_t$ 是 F 对称的;

(3)若 $\forall t\in T, R_t$ 是 F 传递的,则 $\bigcap_{t\in T}R_t$ 是 F 传递的.

证明与定理 4.2.1 类似,从略.

定理 4.11.8　设 $R\in F_L(X\times X)$,令

$$t(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n\tag{4.185}$$

则 $t(R)$是包含 R 的最小传递关系.

证明　显然 $R\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$,由于 $R^m\circ R^n\subseteq t(R)\ (\forall m,n\in\mathbf{N})$,则

$$t(R)\circ R^m=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n\right)\circ R^m=\bigcup_{n=1}^{\infty}(R^n\circ R^m)\subseteq t(R)$$

从而

$$(t(R))^2=t(R)\circ\bigcup_{m=1}^{\infty}R^m=\bigcup_{m=1}^{\infty}t(R)\circ R^m\subseteq t(R)$$

所以 $t(R)$是 F 传递的.

设 $R\subseteq R'$,R'是传递的,则

$$R^2\subseteq(R')^2\subseteq R'$$

从而 $\forall n\in N, R^n\subseteq R'$,故

$$t(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n\subseteq R'$$

所以 $t(R)$ 是包含 R 的最小传递关系.

由于 $t(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$ 是包含 R 的最小传递关系,所以 $t(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$ 是 R 的传递闭包.

定理 4.11.9 设 $R,S\in F_L(X\times X)$.

(1)若 R 是 F 自反的,则 $t(R)$ 是 F 自反的;

(2)若 R 是 F 对称的,则 $t(R)$ 是 F 对称的;

(3)若 R 是 F 传递的,则 $t(R)=R$;

(4)若 $R\subseteq S$,则 $t(R)\subseteq t(S)$;

(5)$(t(R))^{-1}=t(R^{-1})$.

证明 只证(5),其他易证.

(5) $(t(T))^{-1}=(\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n)^{-1}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(R^n)^{-1}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(R^{-1})^n=t(R^{-1})$.

定义 4.11.7 设 L 是完备格,$R\in F_L(X\times X)$,若 R 是 L—F 自反,L—F 对称和 L—F 传递关系,则称 R 是 X 上的 L—F 等价关系.

定理 4.11.10 设 L 是无穷可分配格,$R\in F_L(X\times X)$,若 R 是 F 自反和 F 对称的,则 $t(R)$ 是包含 R 的最小 F 等价关系,即是 R 的 F 等价闭包,记为 $e(R)$.

证明 由定理 4.11.8 知,$t(R)$ 是包含 R 的最小传递关系,设 S 是 R 的 F 等价闭包,则 S 是传递的,故 $S\supseteq t(R)$,又 $t(R)$ 是 F 自反和 F 对称的,所以 $t(R)$ 是 F 等价的,故 $t(R)$ 是包含 R 的最小 F 等价关系.

定理 4.11.11 设 L 是无穷可分配格,$R\in F_L(X\times X)$,则 R 的等价闭包

$$e(R)=t(R\cup R^{-1})\cup I_X \tag{4.186}$$

证明 显然 $t(R\cup R^{-1})\cup I_X$ 是包含 R 且是 F 等价关系. 设 S 是 F 等价,且 $S\supseteq R$,则

$$R\cup R^{-1}\subseteq S\cup S^{-1}=S$$

由此 $t(R\cup R^{-1})\subseteq t(S)=S$. 又因为 $I_X\subseteq S$,故 $t(R\cup R^{-1})\cup I_X\subseteq S$. 所以 $t(R\cup R^{-1})\cup I_X$ 是包含 R 的最小等价关系,即 $e(R)=t(R\cup R^{-1})\cup I_X$.

定理 4.11.12 设 L 是完备格,$R\in F_L(X\times X)$,则 R 是 F 等价关系的充分必要条件是 $\forall\lambda\in L, R_\lambda$ 是等价关系.

证明 设 R 是 F 等价关系,则 $\forall x\in X, R(x,x)=1$,从而 $(x,x)\in R_\lambda$,故 R_λ 是自反的. 又 $R(x,y)=R(y,x)$,则当 $(x,y)\in R_\lambda$ 时 $(y,x)\in R_\lambda$,所以 R_λ 是对称的,若 $(x,y)\in R_\lambda$,$(y,z)\in R_\lambda$,则 $R(x,y)\geqslant\lambda$,$R(y,z)\geqslant\lambda$,从而

$$R(x,z)\geqslant R\circ R(x,z)=\bigvee_{y\in X}(R(x,y)\wedge R(y,z))\geqslant\lambda$$

故 $(x,z)\in R_\lambda$,即 R_λ 是传递的,所以 R_λ 是等价关系.

反之设 $\forall_{\lambda} \in L, R_{\lambda}$ 是等价关系.

由于 $\forall x \in X, (x,x) \in R_1$，故 $R(x,x)=1$，即 R 是 F 自反的. 令 $R(x,y)=\lambda$，则 $(x,y) \in R_{\lambda}$，由此 $(y,x) \in R_{\lambda}$，即 $R(y,x) \geqslant \lambda = R(x,y)$，同理证 $R(x,y) \geqslant R(y,x)$. 所以 $R(x,y)=R(y,x)$，即 R 是 F 对称的.

由于 $(x,y) \in R_{\lambda}, (y,z) \in R_{\lambda}$，则 $(x,z) \in R_{\lambda}$，即 $R(x,y) \geqslant \lambda, R(y,z) \geqslant \lambda$，则 $R(x,z) \geqslant \lambda$，从而 $R(x,z) \geqslant R(x,y) \wedge R(y,z)$，故

$$R(x,z) \geqslant \bigvee_{y \in X} (R(x,y) \wedge R(y,z))$$

所以 $R^2 \subseteq R$，即 R 是 F 传递的. 由此，R 是 F 等价关系.

设 R 是 X 上的 F 等价关系. $\forall x \in X$，令

$$[x]_{\lambda} = \{y \mid (x,y) \in R_{\lambda}\} = \{y \mid R(x,y) \geqslant \lambda\}$$

则

$$X/R_{\lambda} = \{[x]_{\lambda} \mid x \in X\}$$

是 R 的 λ 水平的分类.

定理 4.11.13　设 L 是可分配的完备格，则 $t(R) = \bigcup_{m=1}^{n} R^m$ 的充分必要条件是

$$\bigcup_{m=1}^{n} R^m \supseteq R^{n+1}.$$

证明　必要性显然，现证充分性.

已知 $\bigcup_{m=1}^{n} R^m \supseteq R^{n+1}$，则 $(\bigcup_{m=1}^{n} R^m) \circ R \supseteq R^{n+1} \circ R$，从而 $\bigcup_{m=1}^{n} R^m \supseteq \bigcup_{m=1}^{n} R^{m+1} \supseteq R^{m+2}$. 同理可证 $\bigcup_{m=1}^{n} R^m \supseteq R^{n+i} (i \in N)$，故 $\bigcup_{m=1}^{n} R^m \supseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} R^m = t(R)$，又 $t(R) = \bigcup_{m=1}^{\infty} R^m \supseteq \bigcup_{m=1}^{n} R^m$，所以

$$t(R) = \bigcup_{m=1}^{n} R^m.$$

定理 4.11.14　设 X 是 n 元有限论域，$R \in F_L(X \times X)$，则

$$t(R) = \bigcup_{m=1}^{n} R^m \tag{4.187}$$

证明　若 $R^{n+1}(x,z) = 0 (z \in X)$，则 $R(x,z) \geqslant R^{n+1}(x,z)$，从而 $(\bigcup_{m=1}^{n} R^m)(x,z) \geqslant R^{n+1}(x,z)$，即 $\bigcup_{m=1}^{n} R^m \supseteq R^{n+1}$. 若 $R^{n+1}(x,z) \neq 0$，则

$$R^{n+1}(x,z) = \bigvee_{y_1=1}^{n} \cdots \bigvee_{y_n=1}^{n} (R(x,y_1) \wedge R(y_1,y_2) \wedge \cdots \wedge R(y_n,z) \neq 0,$$

故存在序列 $x, x_1, \cdots x_n, z$，使

$$R^{n+1}(x,z) = R(x,x_1) \wedge R(x_1,x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_n,z) \neq 0$$

由于 X 是 n 元集合，则 $x, x_1, \cdots, x_n, z$ 中有相同元素，不妨设 $x_i = x_j (i<j)$ 于是

$$R(x,x_1) \neq 0,\quad R(x_1,x_2) \neq 0, \cdots, R(x_i,x_{j+1}) \neq 0, \cdots, R(x_n,z) \neq 0$$

由此 $R^{n+1-(j-i)}(x,z) \neq 0$，且

$$R^{n+1-(j-i)}(x,z) = \bigvee_{y_1=1}^{n} \cdots \bigvee_{y_i=1}^{n} \bigvee_{y_{j+1}=1}^{n} \cdots \bigvee_{y_n=1}^{n} (R(x,y_1) \wedge \cdots \wedge R(y_i,y_{j+1}) \wedge \cdots \wedge R(y_n,z))$$

$$\geqslant \bigvee_{y_1=1}^{n} \cdots \bigvee_{y_n=1}^{n} (R(x,y_1) \wedge \cdots \wedge R(y_{n+1},z)) = R^{n+1}(x,z)$$

于是 $R^{n+1}\subseteq\bigcup_{m=1}^{n}R^m$. 所以 $t(R)=\bigcup_{m=1}^{n}R^m$.

定理 4.11.15 设 X 是 n 元有限论域, $R\in F_L(X\times X)$, 若 R 是 F 自反和 F 对称的, 则存在最小的正数 k, 使

$$e(R)=t(R)=R^k \tag{4.188}$$

证明与定理 4.6.3 类似, 从略.

§4.12 模糊关系方程的最大解

设 $\boldsymbol{R}\in F(X\times Y)$, $\boldsymbol{S}\in F(X\times Z)$, 求 $\boldsymbol{T}\in F(Y\times Z)$, 使得

$$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S} \tag{4.189}$$

或者已知 $\boldsymbol{R}\in F(Y\times Z)$, $\boldsymbol{S}\in F(X\times Z)$, 求 $\boldsymbol{T}\in F(X\times Y)$ 使得

$$\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S} \tag{4.190}$$

由于式(4.190)的转置, $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\circ\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$ 变为式(4.189)的类型, 所以我们只讨论式(4.189)的求解问题.

对于方程(4.189), 若该方程有解, 令

$$\mathscr{T}=\{\boldsymbol{T}\in F(Y\times Z)\mid\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}\}$$

则称 $\mathscr{T}$ 是式(4.189)的解集.

若存在 $\boldsymbol{T}^*\in\mathscr{T}$, 使得 $\forall\boldsymbol{T}\in\mathscr{T}$, 有 $\boldsymbol{T}\subseteq\boldsymbol{T}^*$, 则称 $\boldsymbol{T}^*$ 为式(4.189)的最大解.

若存在 $\boldsymbol{T}_*\in\mathscr{T}$, 使得 $\forall\boldsymbol{T}\in\mathscr{T}$, 有 $\boldsymbol{T}_*\subseteq\boldsymbol{T}$, 则称 $\boldsymbol{T}_*$ 为式(4.189)的最小解; 若不存在 $\boldsymbol{T}\in\mathscr{T}$, 使 $\boldsymbol{T}\subseteq\boldsymbol{T}_*$, 则称 $\boldsymbol{T}_*$ 为式(4.189)的极小解.

定理 4.12.1 设 $\boldsymbol{R}\in F(X\times Y)$, $\boldsymbol{S}\in F(X\times Z)$, 令 $\boldsymbol{T}^*\in F(Y\times Z)$, $\forall(y,z)\in Y\times Z$

$$\boldsymbol{T}^*(y,z)=\bigwedge_{x\in X}\{\boldsymbol{S}(x,z)\mid\boldsymbol{R}(x,y)>\boldsymbol{S}(x,z)\} \tag{4.191}$$

(若式(4.191)的右端是空集, 记 $\wedge\varnothing=1$), 则方程(4.189)有解的充分必要条件是 $\boldsymbol{T}^*$ 是式(4.189)的解, 且是最大解.

证明 充分性是显然的.

必要性, 设 $\boldsymbol{T}\in F(Y\times Z)$ 是式(4.189)的一个解, 即 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}$. 则 $\forall(x,z)\in X\times Z$, 有

$$\bigvee_{y\in Y}(\boldsymbol{R}(x,y)\wedge\boldsymbol{T}(y,z))=\boldsymbol{S}(x,z)$$

由此 $\forall y\in Y$, 有

$$\boldsymbol{R}(x,y)\wedge\boldsymbol{T}(y,z)\leqslant\boldsymbol{S}(x,z)$$

即 $\forall x\in X, y\in Y, x\in Z$, 若 $\boldsymbol{R}(x,y)>\boldsymbol{S}(x,z)$, 则 $\boldsymbol{T}(y,z)\leqslant\boldsymbol{S}(x,z)$. 由此

$$\boldsymbol{T}(y,z)\leqslant\bigwedge_{x\in X}\{\boldsymbol{S}(x,z)\mid\boldsymbol{R}(x,y)>\boldsymbol{S}(x,z)\}=\boldsymbol{T}^*(y,z)$$

若 $\boldsymbol{R}(x,y)\leqslant\boldsymbol{S}(x,z)$, 则 $0\leqslant\boldsymbol{T}(y,z)\leqslant1$, 此时由题意 $\boldsymbol{T}^*(y,z)=1$, 故 $\boldsymbol{T}(y,z)\leqslant\boldsymbol{T}^*(y,z)$, 所以 $\boldsymbol{T}\subseteq\boldsymbol{T}^*$, 从而 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}\subseteq\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}^*$.

另一方面，$\forall x\in X,y\in Y,z\in Z$. 若 $\boldsymbol{R}(x,y)\leqslant \boldsymbol{S}(x,z)$，则

$$\boldsymbol{R}(x,y)\wedge \boldsymbol{T}^*(y,z)\leqslant \boldsymbol{S}(x,z)$$

若 $\boldsymbol{R}(x,y)>\boldsymbol{S}(x,z)$，有

$$\boldsymbol{R}(x,y)\wedge \boldsymbol{T}^*(y,z)\leqslant \boldsymbol{T}^*(y,z)=\bigwedge_{x\in X}\{\boldsymbol{S}(x,z)\mid \boldsymbol{R}(x,y)>\boldsymbol{S}(x,z)\}\leqslant \boldsymbol{S}(x,z)$$

由此

$$\bigvee_{y\in Y}(\boldsymbol{R}(x,y)\wedge \boldsymbol{T}^*(y,z))\leqslant \boldsymbol{S}(x,z)$$

即 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}^*\subseteq\boldsymbol{S}$，故 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}\subseteq\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}^*\subseteq\boldsymbol{S}$，于是 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}^*=\boldsymbol{S}$，且 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}\subseteq\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}^*$. 所以，$\boldsymbol{T}^*$ 是式(4.189)的解，而且是最大解.

定理4.12.1说明，求 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}$ 的最大解 $\boldsymbol{T}^*$ 的方法是，对于满足 $\boldsymbol{R}(x,y)>\boldsymbol{S}(x,z)$ 的 $\boldsymbol{S}(x,z)$ 对 x 求下确界，若不满足 $\boldsymbol{R}(x,y)>\boldsymbol{S}(x,z)$，则 $\boldsymbol{T}^*(y,z)=1$.

以上求 F 关系方程 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}$ 的最大解的方法，法国桑切斯(E,Sanchez)博士引入一个算子“α”，定义为 $\alpha:[0,1]^2\to[0,1]$，$(a,b)\to\alpha(a,b)$

$$\alpha(a,b)\triangleq a\alpha b=\begin{cases}b, & a>b\\ 1, & a\leqslant b\end{cases}\tag{4.192}$$

利用算子“α”，定理4.12.1求最大解 $\boldsymbol{T}^*$ 的方法可以写为

$$@:F(X\times Y)\times F(X\times Z)\to F(Y\times Z)$$

$\forall\quad \boldsymbol{R}\in(X\times Y)$，$\boldsymbol{S}\in F(X\times Z)$

$$(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})\to @(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})\triangleq\boldsymbol{R}\,@\,\boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{R}\,@\,\boldsymbol{S}(y,z)=\bigwedge_{x\in X}(\boldsymbol{R}(x,y)\alpha\boldsymbol{S}(x,z))$$

推论4.12.1 F 关系方程 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}$ 的最大解 $\boldsymbol{T}^*=\boldsymbol{R}\,@\,\boldsymbol{S}$.

如果 X,Y,Z 是有限论域，则 $\boldsymbol{R}\in F(X\times Y)$，$\boldsymbol{S}\in F(X\times Z)$ 是 F 矩阵，求式(4.189)的解的问题就变为求矩阵 $\boldsymbol{T}\in F(Y\times Z)$，使得

$$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}\tag{4.193}$$

不妨设 $\boldsymbol{R}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{S}=(b_{ij})_{m\times p}$，记 $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\cdots,\boldsymbol{S}_p)_{1\times p}$. 其中

$$\boldsymbol{S}_j=\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{mj}\end{pmatrix}\quad(j=1,2,\cdots,p)$$

求 $\boldsymbol{T}=(t_{ij})_{n\times p}\triangleq(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_p)_{1\times p}$ 使得 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}$. 即

$$\boldsymbol{R}\circ(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_p)=(\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\cdots,\boldsymbol{S}_p)\tag{4.194}$$

由此得 P 个方程的 F 关系方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{S}_1\\ \boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{S}_2\\ \quad\vdots\qquad\vdots\\ \boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{T}_p=\boldsymbol{S}_p\end{cases}\tag{4.195}$$

所以求解 F 关系方程(4.193),只需讨论求解式(4.195)中的某一方程,P 个方程的公共解就是式(4.193)的解.

设

$$R=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

则 $R\circ T=S$ 可以写为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{4.196}$$

即

$$\begin{cases} (a_{11}\wedge t_1)\vee(a_{12}\wedge t_2)\vee\cdots\vee(a_{1n}\wedge t_n)=b_1 \\ (a_{21}\wedge t_1)\vee(a_{22}\wedge t_2)\vee\cdots\vee(a_{2n}\wedge t_n)=b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ (a_{m1}\wedge t_1)\vee(a_{m2}\wedge t_2)\vee\cdots\vee(a_{mn}\wedge t_n)=b_m \end{cases} \tag{4.197}$$

或者 $\bigvee\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}\wedge t_j)=b_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$.

推论 4.12.2 对于 F 关系方程(5.197),令

$$t_j^*=\bigwedge_{i=1}^{m}\{b_i \mid a_{ij}>b_i\} \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4.198}$$

(若上式右端为空集,记 $\wedge\varnothing=1$),则方程(5.197)有解的充分必要条件是 $T^*=(t_1^*,t_2^*,\cdots,t_n^*)^{\mathrm{T}}$ 是该方程的解,而且是最大解.

求解 F 关系方程(5.197)的最大解(5.198)的方法可以用下面的矩阵方法表示

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\quad \xrightarrow[\bigwedge\limits_{i=1}^{m}\{b_i \mid a_{ij}>b_i\}=\wedge\varnothing=1]{\bigwedge\limits_{i=1}^{m}\{b_i \mid a_{ij}>b_i\}}\quad \begin{pmatrix} t_1^* \\ t_2^* \\ \vdots \\ t_n^* \end{pmatrix} \tag{4.199}$$

即在系数知阵的第 j 列,对满足 $a_{ij}>b_i$ 的所有 b_i 求最小值作为 t_j^*,若无满足 $a_{ij}>b_i$ 的 b_i 存在,则取 $t_j^*=1$.

若用 Sanchez 的算子"α"表示,则求最大解 T^* 可以写为,记

$$R_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

$$B=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$$

则

$$t_j^* = R_j^{\mathrm{T}} \circledast B = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}) \circledast \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \bigwedge_{i=1}^{m} (a_{ij} \alpha b_i) \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.200}$$

注: 对 F 关系方程(5.196)转置得

$$(t_1, t_2, \cdots, t_n) \circ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \cdots, b_m) \tag{4.201}$$

由此求解 F 关系方程(4.201)的问题是综合评判问题的逆问题,即已知 F 关系 $\boldsymbol{R}$ 和评判结果 $\boldsymbol{S}$,求权重分配 $\boldsymbol{T} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$,使 $\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{S}$.

例 4.12.1 下列方程是否有解,若有解,求其最大解.

(1) $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0.7 & 1 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0.6 \\ 0.4 \end{matrix} \xrightarrow{\bigwedge_{i=1}^{2} \{b_i \mid a_{ij} > b_i\}} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

验证,因 $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$. 故 $\boldsymbol{T}^* = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ 是原方程的最大解.

(2) $\begin{pmatrix} 0.7 & 1 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0.7 \\ 0.3 \end{matrix} \xrightarrow{\bigwedge_{i=1}^{2} \{b_i \mid a_{ij} > b_i\}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.7 \end{pmatrix}$

验证,因 $\begin{pmatrix} 0.7 & 1 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}$. 故 $\boldsymbol{T}^* = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ 不是原方程的解,所以原方程无解.

§4.13 模糊关系方程的极小解

对于模糊关系方程

$$\begin{cases} (a_{11} \wedge t_1) \vee (a_{12} \wedge t_2) \vee & \cdots & \vee (a_{1n} \wedge t_n) = b_1 \\ (a_{21} \wedge t_1) \vee (a_{22} \wedge t_2) \vee & \cdots & \vee (a_{2n} \wedge t_n) = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\ (a_{m1} \wedge t_1) \vee (a_{m2} \wedge t_2) \vee & \cdots & \vee (a_{mn} \wedge t_n) = b_m \end{cases} \tag{4.202}$$

即 $$\bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge t_j) = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

若方程(4.202)有解,则由推论4.12.2知,$T^* = (t_1^*, t_2^*, \cdots, t_n^*)^{\mathrm{T}}$ 是该方程的最大解,即

$$\bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge t_j^*) = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

所以对于每一个方程,例如对于第 i 个方程,存在 $j = k_i \in \{1, 2, \cdots, n\}$,使得

$$a_{ik_i} \wedge t_{k_i}^* = b_i$$

这是方程(4.202)有解的必要条件,现在证明上式也是一个充分条件.

对于任意的第 i 个方程有 $a_{ik_i} \wedge t_{k_i}^* = b_i$,则 $\bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge t_j^*) \geqslant b_i$. 即 $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T}^* \supseteq \boldsymbol{S}$.

又由定理4.12.1的证明过程知 $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T}^* \subseteq \boldsymbol{S}$,所以 $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{S}$. 由此得以下定理.

定理4.13.1 方程(4.202)有解的充分必要条件是对于每个方程 $\bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge t_j) = b_i$ 都至少存在一个 $j = k_i \in \{1, 2, \cdots, n\}$,使得

$$a_{ik_i} \wedge t_{k_i}^* = b_i \tag{4.203}$$

对于第 i 个方程令

$$K_i = \{k_i \mid k_i \in \{1, 2, \cdots, n\}, a_{ik_i} \wedge t_{k_i}^* = b_i\} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

又令

$$K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_m \tag{4.204}$$

所以方程(4.202)有解的充分必要条件是 $K \neq \varnothing$.

下面进一步讨论求极小解的方法,从而求方程(4.202)的所有解.

设 $\boldsymbol{T} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)^{\mathrm{T}}$ 是方程(4.202)的解,则 $K \neq \varnothing$,任取 $l = (k_1, k_2, \cdots, k_m) \in K$,令

$$t_j^{(l)} = \bigvee \{b_i \mid k_i = j, k_i \in \{k_1, k_2, \cdots, k_m\}\} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

即 $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$,首先在 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 中找出等于 j 的 k_i,找出和 k_i 脚码 i 相同的 b_i,再求最大者,如果 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 中没有等于 j 的 k_i,此时 $t_j^{(l)} = \bigvee \varnothing = 0$,于是得到

$$\boldsymbol{T}^{(l)} = (t_1^{(l)}, t_2^{(l)}, \cdots, t_n^{(l)})^{\mathrm{T}}$$

现在证明 $\boldsymbol{T}^{(l)}$ 是方程(4.202)的拟极小解.

假若 $\boldsymbol{T} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)^{\mathrm{T}}$ 是方程(4.202)的解,即

$$\bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge t_j) = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

则对于任意的第 i 个方程,$\exists j = k_i \in \{1, 2, \cdots, n\}$,使得

$$a_{ik_i} \wedge t_{k_i} = b_i$$

又因为

$$b_i = a_{ik_i} \wedge t_{k_i} \leqslant a_{ik_i} \wedge t_{k_i}^* \leqslant \bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge t_j^*) = b_i$$

故

$$a_{ik_i} \wedge t_{k_i} = b_i \text{和} a_{ik_i} \wedge t_{k_i}^* = b_i$$

当 $j = k_i$ 时,由 $a_{ik_i} \wedge t_{k_i} = b_i$ 得 $t_j = t_{k_i} \geqslant b_i$ 于是

$$t_j \geq \vee \{b_i \mid j = k_i\} = t_j^{(l)}$$

当 $j \neq k_i$ 时

$$t_j^{(l)} = \vee \{b_i \mid k_i = j\} = \vee \varnothing = 0 \leq t_j$$

故 $T^{(l)} \subseteq T$，从而

$$R \circ T^{(l)} \subseteq R \circ T = S$$

又因为对于任意的第 i 个方程

$$\bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge t_j^{(l)}) \geq a_{ik_i} \wedge t_{k_i}^{(l)} = (\vee \{b_i \mid k_i = j\}) \wedge a_{ik_i} \geq b_i \wedge a_{ik_i} = b_i$$

这是因为由 $a_{ik_i} \wedge t_{k_i} = b_i$ 知 $a_{ik_i} \geq b_i$. 由此

$$R \circ T^{(l)} \supseteq S.$$

所以 $R \circ T^{(l)} = S$，即 $T^{(l)}$ 是方程(4.202)的解，而且是极小解.

由此得下列定理.

定理 4.13.2 设 T 是方程(4.202)的解，则存在 $l = (k_1, k_2, \cdots, k_m) \in K$，使 $R \circ T^{(l)} = S$ 且 $T^{(l)} \subseteq T \subseteq T^*$.

定理 4.13.2 说明，若 T 是方程(4.202)的解，则存在一个 $T^{(l)}$ 比 T 小，且 $T^{(l)}$ 是方程(4.202)的解，我们称 $T^{(l)}$ 为拟极小解，把所有拟极小解进行比较，去掉较大的解，剩下的解为极小解，极小解和最大解之间的解就是(4.202)的所有解.

例 4.13.1 求下列方程的最大解、极小解和所有解.

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

解 第一步，求最大解

$$\left(\begin{matrix} 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} = T^*$$

验证

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

所以 $T^* = (0.2, 0.2, 0.4)^{\mathrm{T}}$ 是方程的最大解.

第二步，求 $K = K_1 \times K_2 \times K_3$，对于第一个方程

$$\begin{aligned}&(a_{11} \wedge t_1^*) \vee (a_{12} \wedge t_2^*) \vee (a_{13} \wedge t_3^*) \\ &\quad = (0.3 \wedge 0.2) \vee (0.2 \wedge 0.2) \vee (0 \wedge 0.4) = 0.2\end{aligned}$$

则得 $K_1 = \{1, 2\}$. 对于第二个方程

$$\begin{aligned}&(a_{21} \wedge t_1^*) \vee (a_{22} \wedge t_2^*) \vee (a_{23} \wedge t_3^*) \\ &\quad = (0.5 \wedge 0.2) \vee (0 \wedge 0.2) \vee (0.6 \wedge 0.4) = 0.4\end{aligned}$$

则得 $K_2=\{3\}$. 对于第三个方程

$$(a_{31}\wedge t_1^*)\vee(a_{32}\wedge t_2^*)\vee(a_{33}\wedge t_3^*)$$
$$=(0.2\wedge 0.2)\vee(0.4\wedge 0.2)\vee(0.1\wedge 0.4)=0.2$$

则得 $K_3=\{1,2\}$. 由此

$$K=K_1\times K_2\times K_3=\{1,2\}\times\{3\}\times\{1,2\}$$
$$=\{(1,3,1),(1,3,2),(2,3,1),(2,3,2)\}$$

第三步 求极小解. 取 $l_1=(1,3,1)$

$$t_1^{(l_1)}=\vee\{b_i \mid k_i=1\}=\vee\{b_1,b_3\}=\vee\{0.2,0.2\}=0.2$$
$$t_2^{(l_1)}=\vee\{b_i \mid k_i=2\}=\vee\varnothing=0$$
$$t_3^{(l_1)}=\vee\{b_i \mid k_i=3\}=\vee b_2=0.4$$

故 $\boldsymbol{T}^{(l_1)}=(0.2,0,0.4)^{\mathrm{T}}$ 是一个拟极小解. 取 $l_2=(1,3,2)$.

同理求得 $t_1{}^{(l_2)}=0.2$, $t_3{}^{(l_2)}=0.2$, $t_3{}^{(l_2)}=0.4$. 故 $\boldsymbol{T}^{(l_2)}=(0.2,0.2,0.4)^{\mathrm{T}}$ 是拟极小解.

取 $l_3=(2,3,1)$, 求得 $t_1^{(l_3)}=0.2$, $t_2^{(l_3)}=0.2$, $t_3^{(l_3)}=0.4$. 故 $\boldsymbol{T}^{(l_3)}=(0.2,0.2,0.4)^{\mathrm{T}}$是拟极小解.

取 $l_4=(2,3,2)$, 求得 $t_1^{(l_4)}=0, t_2^{(l_4)}=0.2, t_3^{(l_4)}=0.4$. 故 $\boldsymbol{T}^{(l_4)}=(0,0.2,0.4)^{\mathrm{T}}$ 是拟极小解.

由于 $\boldsymbol{T}^{(l_1)}\subseteq\boldsymbol{T}^{(l_2)}=\boldsymbol{T}^{(l_3)}, \boldsymbol{T}_4^{(l_4)}\subseteq\boldsymbol{T}_2^{(l_2)}=\boldsymbol{T}^{(l_3)}$.

所以 $\boldsymbol{T}^{(l_1)}=(0.2,0,0.4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{T}^{(l_4)}=(0,0.2,0.4)^{\mathrm{T}}$ 是方程的两个极小解.

由此原方程的所有解为 $\mathscr{T}=\{(0.2,[0,0.2],0.4)^{\mathrm{T}},([0,0.2],0.2,0.4)^{\mathrm{T}}\}$.

以上求 F 关系方程的最大解和极小解的方法十分繁琐,下面我们介绍一种应用求最大解和拟极小解的原理,对系数矩阵进行"上铣"和"平铣",求方程的最大解和极小解的方法,这个方法是汪培庄教授提出来的,以例题说明之.

例 4.13.2 求解例 4.13.1 中 F 关系方程.

$$(x_1,x_2,x_3)\circ\begin{pmatrix}0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.6 & 0.1\end{pmatrix}=(0.2,0.4,0.2)$$

解 记系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 常数项行矩阵为 $\boldsymbol{B}$.

第一步 标准化排列. 将 $\boldsymbol{B}$ 中元素从大到小排列, $\boldsymbol{A}$ 中对应于 $\boldsymbol{B}$ 的列也和 $\boldsymbol{B}$ 相应变化

$$\begin{matrix}0.2 & 0.4 & 0.2\end{matrix}\qquad\qquad\qquad\begin{matrix}0.4 & 0.2 & 0.2\end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix}0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.6 & 0.1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0 & 0.2 & 0.4\\ 0.6 & 0 & 0.1\end{pmatrix}$$

第二步 用 $\boldsymbol{B}$ 中 b_j"上铣"矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列 $(j=1,2,3)$. 对于每列,若 $a_{ij}>b_j$,

将 a_{ij}改为 b_j；若 $a_{ij} \leqslant b_j$，将 a_{ij}位置变为空白（即空集），再对每一行求下确界（注 $\wedge \varnothing = 1$），写在矩阵右边.

$$\begin{array}{ccc} 0.4 & 0.2 & 0.2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{上铣}} \left(\begin{array}{ccc} 0.4 & 0.2 & \\ & & 0.2 \\ 0.4 & & \end{array}\right) \begin{array}{c} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{array}$$

则 $x^* = (0.2, 0.2, 0.4)$ 可能是原方程的最大解.

第三步　用 $\boldsymbol{B}$ 的 b_j"平铣"矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列（$j = 1, 2, 3$）. 对于每一列，若 $a_{ij} \geqslant b_j$，将 a_{ij}改为 b_j，若 $a_{ij} < b_j$，将 a_{ij}位置变为空白（即空集），并将第二步求得的最大解 $\boldsymbol{X}^*$ 写在平铣矩阵的右边.

$$\begin{array}{ccc} 0.4 & 0.2 & 0.2 \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{ccc} 0.4 & 0.2 & 0.2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{平铣}} \left(\begin{array}{ccc} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & & \end{array}\right) \begin{array}{c} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{array}$$

第四步　在"平铣"矩阵中划去每一行中大于该行右端最大解的数

$$\left(\begin{array}{ccc} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & & \end{array}\right) \begin{array}{c} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} & 0.2 & 0.2 \\ & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & & \end{array}\right)$$

由于所得矩阵的每一列均非空，则方程有解，且 $\boldsymbol{X}^*$ 是最大解.

第五步　在第四步得到的矩阵中每列选一个非空元素构成一个矩阵，然后按行求上确界（注 $\vee \varnothing = 0$），所得向量是方程的拟极小解.

$$\left(\begin{array}{ccc} & 0.2 & 0.2 \\ & & \\ 0.4 & & \end{array}\right) \begin{array}{c} 0.2 \\ 0 \\ 0.4 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc} & 0.2 & \\ & & 0.2 \\ 0.4 & & \end{array}\right) \begin{array}{c} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} & & 0.2 \\ & 0.2 & \\ 0.4 & & \end{array}\right) \begin{array}{c} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & & \end{array}\right) \begin{array}{c} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{array}$$

所以拟极小解 $\boldsymbol{X}_1 = (0.2, 0, 0.4)$，$\boldsymbol{X}_2 = (0.2, 0.2, 0.4) = \boldsymbol{X}_3$，$\boldsymbol{X}_4 = (0, 0.2, 0.4)$，由于 $\boldsymbol{X}_1 \subseteq \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_3 \supseteq \boldsymbol{X}_4$，故 $\boldsymbol{X}_1 = (0.2, 0, 0.4)$ 和 $\boldsymbol{X}_4 = (0, 0.2, 0.4)$ 为极小解.

由此原方程的所有解为 $\boldsymbol{X} = (0.2, [0, 0.2], 0.4) \cup ([0, 0.2], 0.2, 0.4)$.

例 4.13.3　用上铣和平铣法求解 F 关系方程

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\circ\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.9 & 0.8 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.8 & 0.9 & 0.7 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}=(0.7,0.4,0.4,0.3,0.6)$$

解 将例 4.13.2 中的五步简化为下列三步.

第一步,上铣

$$\begin{matrix} \begin{matrix} 0.7 & 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0.6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.9 & 0.8 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.8 & 0.9 & 0.7 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\text{标准化}} \begin{matrix} \begin{matrix} 0.7 & 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.8 & 0.5 & 0.7 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.8 & 0.4 & 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{上铣}} \begin{pmatrix} & 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.3 \\ & & & & 0.3 \\ & & & & \\ 0.7 & & 0.4 & 0.4 & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{求下确界}} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 1 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

第二步 平铣

$$\begin{matrix} \begin{matrix} 0.7 & 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.8 & 0.5 & 0.7 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.8 & 0.4 & 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\text{平铣}} \begin{pmatrix} & 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.3 \\ & & 0.4 & & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & & \\ 0.7 & & 0.4 & 0.4 & \end{pmatrix} \begin{matrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 1 \\ 0.4 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{划去每行大于右端的元素}} \begin{pmatrix} & & & & 0.3 \\ & & & & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & & \\ & & 0.4 & 0.4 & \end{pmatrix}$$

由于各列非空,所以方程的最大解 $\boldsymbol{X}^*=(0.3,0.3,1,0.4)$.

第三步 求极小解

各列分别取一个元素再按行求上确界.

$$\begin{pmatrix} & & & & 0.3 \\ & & & & \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & & \\ & & & 0.4 & \end{pmatrix} \begin{matrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & & \\ & & & 0.4 & \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & & & 0.3 \\ & & & & \\ 0.7 & 0.6 & & & \\ & & 0.4 & 0.4 & \end{pmatrix} \begin{matrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 & & & \\ & & 0.4 & 0.4 & \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{matrix}$$

故 $\boldsymbol{X}_1=(0.3,0,0.7,0.4)$，$\boldsymbol{X}_2=(0,0.3,0.7,0.4)$ 是拟极小解，也是极小解，所以其解集为

$$\boldsymbol{X}=(0.3,[0,0.3],[0.7,1],0.4)\cup([0,0.3],0.3,[0.7,1],0.4).$$

习 题 4

1. 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$，给出 X 到 Y 的下列关系：

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0 & 0.1 & 0.2 & 0.5\\ 0.3 & 0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.4 & 0.2 & 0.7 & 0.3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.5\\ 0.7 & 0.6 & 0.2 & 0.8\\ 0.6 & 0.4 & 0.3 & 0.9\end{pmatrix}$$

求(1) $\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{R}'\cup\boldsymbol{S}$；　　(2) $\boldsymbol{R}_{0.5}$，$(\boldsymbol{R}'\cup\boldsymbol{S})_{0.3}$.

2. 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$，$Z=\{z_1,z_2\}$，已知 $\boldsymbol{R}\in\boldsymbol{F}(X\times Y)$，$\boldsymbol{S}\in\boldsymbol{F}(Y\times Z)$.

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.4 & 0.1 & 0.6\\ 0.9 & 0.4 & 0.3 & 0.7\\ 0.1 & 0.5 & 0.2 & 0.9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.5\\ 0.6 & 0.1\\ 0.7 & 0.3\\ 1 & 0.7\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{R}'\circ\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\circ\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$.

3. 设 $X=\{1,2,3\}$，在 X 中定义以下关系：

(1) $R_1=\{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$；

(2) $R_2=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$；

(3) $R_3=\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(1,3),(3,3)\}$；

(4) $R_4=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$.

指出 R_1,R_2,R_3,R_4 具有自反性、对称性、反对称性及传递性中哪几个性质.

4. 设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{m\times n}$ 是模糊矩阵，证明

$$(\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cup\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}},\quad (\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cap\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}.$$

5. 设 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{n\times p}$ 是模糊矩阵，证明 $(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\circ\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$.

6. 设 $R\in F(X\times Y)$，证明 R 是 X 上的传递关系的充分必要条件是 $\forall\alpha\in[0,1]$，$\forall x,y,z\in X$，若 $R(x,y)\geqslant\alpha$，$R(y,z)\geqslant\alpha$，则 $R(x,z)\geqslant\alpha$.

7. 设 $R_t\in F(X\times Y)\,(t\in T)$，$S\in F(Y\times Z)$，证明

(1) $(\bigcup_{t\in T}R_t)\circ S=\bigcup_{t\in T}R_t\circ S$；　　(2) $(\bigcap_{t\in T}R_t)\circ S\subseteq\bigcap_{t\in T}R_t\circ S$.

8. 设 $R\in F(X\times X)$，若 $R^n\supseteq R^{n+1}\,(n\in\mathbf{N})$，证明 $t(R)=\bigcup_{i=1}^{n}R^i$.

9. 设 R 是 X 上的 F 自反和 F 对称关系，证明 $\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$(t(R))_\lambda=t(R_\lambda).$$

10. 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_7\}$，$\boldsymbol{R}\in F(X\times X)$，

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0.1 & 0 & 0.8 & 1 & 0.6\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0.8 & 1\\ 0.1 & 0 & 1 & 0.7 & 0.6 & 0 & 0.1\\ 0 & 1 & 0.7 & 1 & 0 & 0.9 & 0\\ 0.8 & 0 & 0.6 & 0 & 1 & 0.7 & 0.5\\ 1 & 0.8 & 0 & 0.9 & 0.7 & 1 & 0.4\\ 0.6 & 1 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0.4 & 1\end{pmatrix}$$

求 $t(\boldsymbol{R})$，并作聚类图.

11. 设模糊图 $\tilde{G}$ 如图 4.14 所示，求 $\tilde{G}$ 的最大生成树.

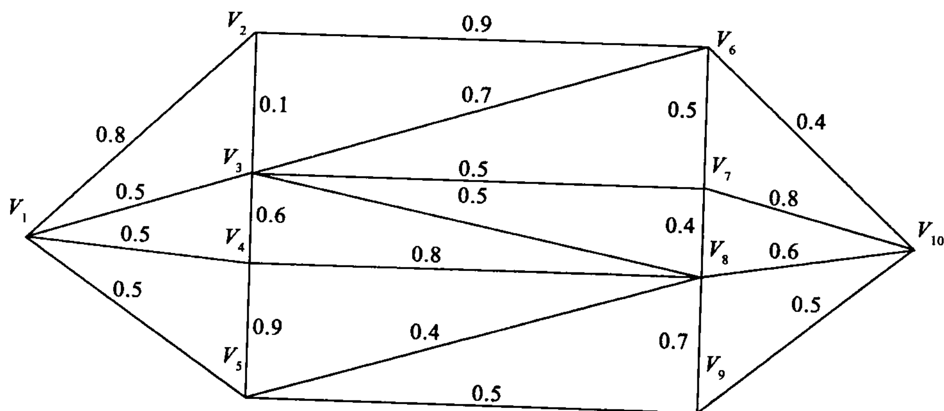


图 4.14

12. 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$，$\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2\in F(X\times Y)$，

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}0.3 & 1 & 0.2 & 1\\ 0.9 & 0.2 & 0 & 0.5\\ 0.8 & 0.1 & 0.8 & 0.9\\ 0.9 & 0.5 & 1 & 0.9\\ 0.5 & 0 & 0.7 & 0.7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0 & 0.5\\ 1 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(1)求 $\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2$ 在 X 和 Y 上的投影；

(2)求 $\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_2$ 在 x_2 和 y_4 上的截影.

13. 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$，给定单因素评判矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和权向量 $\boldsymbol{A}$，

$$R=\begin{pmatrix}0.4 & 0.6 & 0\\ 0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.4 & 0.3 & 0.3\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{pmatrix},\quad A=(0.5,0.3,0.1,0.1)$$

用最大隶属原则求综合评判的结果.

14. 判断下列模糊关系方程是否有解，如果有解，求出其最大解.

(1) $$\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 0.6 & 0.6\\ 0.3 & 0.2 & 0.6 & 0.2\\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0.7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4\\ 0.5\\ 0.3\end{pmatrix};$$

(2) $$\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 0.6 & 0.6\\ 0.3 & 0.6 & 0.2 & 0.2\\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0.7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4\\ 0.5\\ 0.3\end{pmatrix}.$$

15. 求出下列模糊关系方程的全部解

$$\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0.6 & 0.7\\ 0.7 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.4 & 0 & 0.1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4\\ 0\\ 0.3\end{pmatrix}.$$

第5章 模糊逻辑

模糊逻辑是模糊数学中很重要的一个分支.模糊逻辑对于模糊控制论、模糊语言、计算机科学、医疗诊断等方面都具有实际意义.现代科学对模糊性的研究,开始于罗素和布兰克的工作.由于缺乏描述和处理模糊性的得力概念,他们的工作并未导致新逻辑理论的出现.逻辑学界的注意力转向其他方面.我们现在知道,集合论和数理逻辑在某些方面是等价的,因此在 1965 年 L. A. Zadeh 的模糊集合理论诞生后,首先便应用于数理逻辑,相关资料表明,在 1966 年马利诺斯(P. N. Marinos)已经发表了模糊逻辑的内部研究报告,首先提出模糊逻辑的概念,这标志着模糊逻辑的诞生.1969 年,戈根(J. A. Goguen)研究了不确切概念的逻辑问题.1972—1974 年,L. A. Zadeh 先后提出了模糊限制词、语言变量、语言真值、近似推理等关键性概念,制定了模糊推理的复合规则,奠定了模糊逻辑的基础.同时马丹尼(E. H. Mamdani)把模糊逻辑与模糊语言用于工业控制,提出了模糊控制论.此外,美国的戈根、斯卡勒(H. J. Skala)等人也对模糊逻辑进行了多方面的探讨.这些工作标志着模糊逻辑作为一个新的研究领域初步开拓出来了.

§5.1 模糊命题与逻辑演算

5.1.1 普通命题与逻辑演算

通常把具有真假可言的陈述句称为(普通)命题,记为 $P,Q,\cdots$.例如:"7 是自然数","7 是偶数","雪是白的","雪是黑的".其中第一、第三命题是真命题;第二、第四命题是假命题.但"现在几点了"就不是命题,因为不是陈述句.任何命题都存在判定真假的问题.一个普通命题非真即假,非假即真,可以明确判断.设 μ 是全体普通命题组成的集合,令

$$T:\ \mu\to\{0,1\}$$

$$P\in\mu,T(P)=\begin{cases}1, & \text{若 } P \text{ 是真命题}\\ 0, & \text{若 } P \text{ 是假命题}\end{cases}$$

称 $T(P)$ 为命题 P 的真值,$\{0,1\}$ 称为真值域.

例如:命题 P 是:"7 是自然数",则 $T(P)=1$.命题 P 是:"7 是偶数",则 $T(P)=0$.

一个语句,如果不能再进一步分解成更简单的语句,且也是一个命题,则称该命题为原子命题.若干个原子命题通过命题连接词连接起来而构成的新命题,称为复合命题.常用的命题连接词(亦称命题运算)有以下五种:

(1)否定连接词$\neg$(非):$\mu\to\mu, P\to\neg P$

真值 $T(\neg P)\triangleq 1-T(P)$

(2)析取连接词$\vee$(或):$\mu\times\mu\to\mu,(P,Q)\to P\vee Q$

真值 $T(P\vee Q)\triangleq T(P)\vee T(Q)$

(3)合取连接词$\wedge$(且):$\mu\times\mu\to\mu,(P,Q)\to P\wedge Q$

真值 $T(P\wedge Q)\triangleq T(P)\wedge T(Q)$

(4)蕴涵连接词$\to$(蕴涵):$\mu\times\mu\to\mu,(P,Q)\to(P\to Q)$

真值 $T(P\to Q)\triangleq T(\neg P\vee Q)$

(5)等价连接词$\leftrightarrow$(等价):$\mu\times\mu\to\mu,(P,Q)\to(P\leftrightarrow Q)$

真值 $T(P\leftrightarrow Q)\triangleq T((P\to Q)\wedge(Q\to P))=T((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P))$.

例如:命题 P 表示"张三是工程师",命题 Q 表示"李四是大学生",则$\neg P$ 表示"张三不是工程师",$\neg Q$ 表示"李四不是大学生",$P\wedge Q$ 表示"张三是工程师且李四是大学生",$P\vee Q$ 表示"张三是工程师或李四是大学生"等.

在数理逻辑中研究命题,并不关心命题叙述的具体内容,而只注意命题的真假值以及命题之间的逻辑关系.这样,我们就可以对命题作形式化的研究.

例如,根据定义,无论命题 P 表示的是什么内容,则当且仅当 P 假时,$\neg P$ 为真,换句话说,当 P 真时,$\neg P$ 为假.这里所讨论的逻辑是二值逻辑.为简便起见,以 1 表示真,0 表示假,则以上所述可以写成表 5.1 的形式.

表 5.1 称为真值表.演算法则可以由真值表唯一确定.类似地,$P\vee Q$ 和 $P\wedge Q$ 的真值表如表 5.2 所示.

表 5.1

P	$\neg P$
1	0
0	1

表 5.2

P	Q	$P\vee Q$	$P\wedge Q$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

命题的真值表完全刻画了命题的逻辑含义,因此,两个命题 P 和 Q 的真值表如果完全相同,我们就把它们看成相等,记做 $P=Q$.

在真值表中,若一个命题的值都是 1,则称为永真命题,也称为重言式;若一个命题的值都是 0,则称为永假命题,也称为矛盾式.

在集合论中，给定论域 U 的子集 A，对 U 中的某一元素 a，a 或者属于 A，或者不属于 A. 因此，“a 属于 A”就是所谓的命题. 可以把这个命题看成两部分组成：“a”称为主语，也称为个体；“属于 A”称为谓语或谓词. 显然，只是个体或只是谓词都不能表达一个完整的意思，但把个体和谓词结合起来，就能得到可以明确判断真假的陈述句，即命题. 通常用大写字母表示谓词，小写字母表示个体. 例如，用 P 表示谓词“属于 A”，当把个体和谓词结合起来构成命题时，就用括号将个体括住并写在谓词的符号后面，如，“a 属于 A”就可以写成 $P(a)$.

假定在命题中出现的个体是变量，即可以取为论域中的任意元素，我们用符号 x 表示. 于是，“x 属于 A”就可以写成 $P(x)$. 当然，这时 $P(x)$ 的值可以取为 0 或 1，随着 x 的取定而定. 换句话说，$P(x)$ 的值是 x 的函数，通常称为谓词 P 的真值函数. 这样，对给定的谓词 P，$P(a)$ 是一个命题（a 是一个具体的对象），$P(x)$ 是真值函数. 在讨论中，为表述简洁，只要不发生混淆，$P(x)$ 也常用 P 代表相应的命题或真值函数.

例如，陈述句“x 是大学生”，由于 x 是变元，因而无法判断其真假，x 不是一个命题，如果给 x 赋以具体对象 x_0（如张三），则“x_0 是大学生”就是一个命题. 我们也常将这种陈述句称为谓词，x 称为个体变元，是句子的主语，“是大学生”是谓语. 谓词可以看做一个命题函数.

$$H: X \to \mu, x_0 \to H(x_0) \in \mu$$

以 A 表示使 $P(x)$ 为真的所有 x 组成的集合，即

$$A \triangleq \{x \mid T(P(x)) = 1\} \in 2^X$$

或简写为 $A \triangleq \{x \mid P(x)\} \in 2^X$，称集合 A 为谓词 P 的集合表示（或称为真域）.

则 x 属于 A，$P(x)$ 为真，取值为 1，即 $T(P(x)) = 1$；否则，$P(x)$ 为假，取值为 0，即 $T(P(x)) = 0$. 这样，在集合和逻辑之间可以建立起对应关系如下

集合	逻辑
A	$P(x)$
$a \in A$	$P(a) = 1$
$a \notin A$	$P(a) = 0$

有时把 P 或 $P(x)$ 称为集合 A 的特性谓词. 所以，用描述法确定集合，实际上就是用特性谓词来确定集合. 集合与特性谓词是一个事物的两种表述方式.

同样，陈述句“x 与 y 谈话”也是一个谓词，个体变元（主语）是 x, y，谓语是“谈话”. 可以用 $R(x,y)$ 来表示，称为二元谓词，$R(x,y)$ 的集合表示为一个二元关系

$$R \triangleq \{(x,y) \mid T(R(x,y)) = 1\} \in 2^{X \times Y}$$

三元谓词、四元谓词等类似.

5.1.2　模糊命题与模糊谓词

考虑陈述句“张三是年轻人”，由于年轻人的概念是模糊的，因而“张三是年轻人”无确切的真假可言，但是该陈述句又有真假的含义. 这种陈述句称为模糊命题. 如果取模糊命题的真值为[0,1]中的数，那么称这种模糊逻辑为无限值逻辑，而称经典逻辑为二值逻辑.

对无限值逻辑来说，设 $\tilde{\mu}$ 为全体模糊命题组成的集合，令

$$T:\ \tilde{\mu}\to[0,1],\quad \underset{\sim}{A}\mapsto T(\underset{\sim}{A}).$$

称 $T(\underset{\sim}{A})$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的真值.

类似地考虑模糊谓词，如：

(1) $\underset{\sim}{H}(x)$ =“x 是老人”；

(2) $\underset{\sim}{R}(x,y)$ =“x 与 y 很像”.

(1)是一个一元模糊谓词，固定 $x=x_0$，则 $\underset{\sim}{H}(x_0)$是模糊命题. 模糊谓词 $\underset{\sim}{H}(x)$ 可以用模糊集 $\underset{\sim}{H}$ 表示，x 对 $\underset{\sim}{H}$ 的隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{H}}(x)=T(\underset{\sim}{H}(x))$. (2)是一个二元模糊谓词，它可以用二元模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 来表示，(x,y)对 $\underset{\sim}{R}$ 的隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)=T(\underset{\sim}{R}(x,y))$，即一个二元模糊谓词对应于一个二元模糊关系. 三元的类似.

5.1.3　无限值模糊命题的逻辑演算

和普通集合的运算推广到模糊集合的运算类似，我们很自然地将二值逻辑演算推广到模糊命题中来，所以，在模糊命题集合 F 中，也有“$\wedge,\vee,\neg,\to,\leftrightarrow$”运算：

1. “$\neg$”(非)：是映射 $F\to F$，

$$\forall A\in F,\quad A\mapsto\neg A$$

其真值，$T(\neg A)=1-T(A)$.

2. “$\wedge$”(合取)：是映射 $F\times F\to F$，

$$\forall A,B\in F,\quad (A,B)\mapsto(A\wedge B)$$

其真值，$T(A\wedge B)=T(A)\wedge T(B)$.

3. “$\vee$”(析取)：是映射 $F\times F\to F$，

$$\forall A,B\in F,\quad (A,B)\to(A\vee B)$$

其真值，$T(A\vee B)=T(A)\vee T(B)$.

4. “$\to$”(蕴涵)：是映射 $F\times F\to F$，

$$\forall A,B\in F,\quad (A,B)\to(A\to B)$$

其真值，$T(A\to B)=T((\neg A)\vee(A\wedge B))$

$=T(\neg A)\vee T(A\wedge B)=(1-T(A))\vee(T(A)\wedge T(B))$

5. “$\leftrightarrow$”（等价）：是映射 $F\times F\to F$，

$$\forall A,B\in F,\quad (A,B)\to(A\leftrightarrow B),$$

其真值，$T(A\leftrightarrow B)=T((A\to B)\wedge(B\to A))=T(A\to B)\wedge T(B\to A)$.

由于谓词可以由集合来表示，谓词的逻辑演算 $\wedge,\vee,\neg$ 与集合运算 $\cup,\cap,c$ 相对应，所以 $(F(X),\wedge,\vee,\neg)$ 是与 $(F,\cup,\cap,c)$ 对应的软代数系统.

正是由于命题的逻辑演算与其集合表示的集合运算相对应，所以模糊命题的模糊集合表示的运算依赖于模糊算子的形式.

设模糊命题 $A,B\in\tilde{\mu}$，一般地，我们有如下的运算：

(1) 概率积与概率和

$$T(A\overset{\cdot}{\wedge}B)\triangleq T(A)T(B)$$

$$T(A\underset{+}{\wedge}B)\triangleq T(A)+T(B)-T(A)T(B).$$

(2) 有界积与有界和

$$T(A\odot B)\triangleq\max\{T(A)+T(B)-1,0\}$$

$$T(A\oplus B)\triangleq\min\{T(A)+T(B),1\}.$$

(3) Einstein 积与和

$$T(A\ \dot{\varepsilon}B)\triangleq\frac{T(A)T(B)}{1+(1-T(A))(1-T(B))}$$

$$T(A\ \overset{+}{\varepsilon}B)\triangleq\frac{T(A)+T(B)}{1+T(A)T(B)}.$$

(4) Hamacher 积与和

$$T(A\ \dot{\gamma}B)\triangleq\frac{T(A)T(B)}{\lambda+(1-\lambda)(T(A)+T(B)-T(A)T(B))}$$

$$T(A\ \overset{+}{\gamma}B)\triangleq\frac{T(A)+T(B)+(\lambda-2)T(A)T(B)}{1+(\lambda-1)(T(A)T(B))},$$

其中 $\lambda\geqslant1$ 为参数.

(5) Yager 和与 Yager 积

$$T(A\ \overset{+}{y}B)\triangleq\min\{1,[T(A)^p+T(B)^p]^{1/p}\}$$

$$T(A\ \dot{y}B)\triangleq1-\min\{1,[1-T(A))^p+(1-T(B))^p]^{1/p}\},$$

其中 $p\geqslant1$ 为参数.

5.1.4 模糊命题公式与模糊谓词公式

模糊命题公式的定义可以采用下面的递归定义.

定义 5.1.1 (1)原子模糊命题是模糊命题公式(又称为合式公式);

(2)若 $\underset{\sim}{A}$ 是模糊命题公式,则$\neg \underset{\sim}{A}$ 是模糊命题公式;

(3)若 $\underset{\sim}{A}$,$\underset{\sim}{B}$ 是模糊命题公式,则 $\underset{\sim}{A} \vee \underset{\sim}{B}$,$\underset{\sim}{A} \wedge \underset{\sim}{B}$ 是模糊命题合式公式;

(4)当且仅当有限次使用(1)、(2)、(3)求得的公式是模糊命题公式.

对模糊谓词公式,类似地有以下定义.

定义 5.1.2 (1)原子模糊谓词是模糊谓词公式;

(2)若 $\underset{\sim}{A}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是模糊谓词公式,则$\neg \underset{\sim}{A}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 也是模糊谓词公式;

(3)若 $\underset{\sim}{A}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,$\underset{\sim}{B}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是模糊谓词公式,则

$\underset{\sim}{A}(y_1,y_2,\cdots,y_n) \vee \underset{\sim}{B}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,$\underset{\sim}{A}(y_1,y_2,\cdots,y_n) \wedge \underset{\sim}{B}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 也是模糊谓词公式;

(4)若 $\underset{\sim}{A}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是模糊谓词公式,则 $\forall(y_i)\underset{\sim}{A}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,$\exists(y_i)\underset{\sim}{A}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$也是模糊谓词公式;

(5)当且仅当有限次使用(1)~(4)求得公式是模糊谓词公式.

5.1.5 模糊逻辑函数(或模糊逻辑公式)

普通命题公式的真值可以用相应的布尔函数给出,类似地可以用模糊逻辑公式给出模糊命题的真值,模糊逻辑公式是布尔函数的推广. 若 $A = A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$是模糊命题公式,其中,$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为模糊命题变元,令 $T(P_i) = x_i \in [0,1]$,那么命题变元 P_i 与变元 x_i 相对应,于是,模糊命题$A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$可以对应其真值 $T(A(P_1,P_2,\cdots,P_n)) = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,即

$$f:[0,1]^n \to [0,1], \quad (x_1,x_2,\cdots,x_n) \to f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

称 f 为 A 的模糊逻辑函数(或模糊逻辑公式),亦即为 A 的真值的模糊表达式.

下面给出严格的递归定义.

定义 5.1.3 (1)$0,1,x_i(i=1,2,\cdots,n)$是模糊逻辑公式(这里 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$表示函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = x_i$,$x_i$ 对应命题变元 P_i,即 $T(P_i) = x_i$;0,1 分别对应恒真、恒假命题. 它们是函数$f_F(x_1,x_2,\cdots,x_n) \equiv 0$, $f_T(x_1,x_2,\cdots,x_n) \equiv 1$);

(2)若 f 是模糊逻辑公式,则$\neg f = 1 - f$ 也是模糊逻辑公式;

(3)若 f,g 是模糊逻辑公式,则 $f \wedge g$, $f \vee g$ 也是模糊逻辑公式;

(4)FE 是有限次使用(1)~(3)得到的最小类的集合,称 $f \in FE$ 为 n 元模糊逻辑公式,或 n 元真值模糊表达式,简称为 n 元 F 公式.

例如,$f(x,y) = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$ 是二元模糊逻辑公式. 应该指出,并非

$[0,1]^{[0,1]^n}$中一切函数都可以作为真值的模糊表达式.

一个布尔函数在$\{0,1\}$中取值,表示命题所涉及的概念是确切的、清晰的,而一个模糊逻辑公式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在$[0,1]$中取值,说明所涉及的概念是模糊的,$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与0或1越接近,则概念越清晰,为了比较它们的清晰程度,我们定义一个二元"清晰"关系C.

定义 5.1.4 在$[0,1]$中定义二元关系$C\in\mathscr{P}([0,1]\times[0,1])$.

$$(a,b)\in C(\text{记 } aCb)\Leftrightarrow a\geqslant b\geqslant\frac{1}{2}\quad\text{或}\quad a\leqslant b\leqslant\frac{1}{2}\tag{5.1}$$

称C为清晰关系,称aCb为a清晰于b.

在$[0,1]^n$中定义二元关系$C\in\mathscr{P}([0,1]^n\times[0,1]^n)$,

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)C(b_1,b_2,\cdots,b_n)\Leftrightarrow a_iCb_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

称$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$清晰于$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.

定理 5.1.1 模糊逻辑公式f具有如下性质:

$$\forall a,b\in[0,1]^n,\quad aCb\Rightarrow f(a)Cf(b)\tag{5.2}$$

证明 令$FE'=\{f\mid f\in FE\text{ 满足式(5.2)}\}$,现证$FE'=FE$.

(1)由于$0,1,x_i(i=1,2,\cdots,n)$分别表示模糊逻辑公式

$f_F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv0$, $f_T(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv1$, $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_i(i=1,2,\cdots,n)$,于是,$aCb\Rightarrow f_i(a)=a_iCb_i=f_i(b)$. 又因为$f_F(a)=f_F(b)=0$, $f_T(a)=f_T(b)=1$,且$0C0$, $1C1$自然满足,因此$0,1,x_i(i=1,2,\cdots,n)\in FE'$.

(2)若$f\in FE'$,则

$$aCb\Rightarrow f(a)Cf(b)\Rightarrow\begin{cases}f(a)\geqslant f(b)\geqslant\dfrac{1}{2}\\ \text{或}f(a)\leqslant f(b)\leqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-f(a)\leqslant1-f(b)\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \text{或}1-f(a)\geqslant1-f(b)\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\neg f(a)\leqslant\neg f(b)\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \text{或}\neg f(a)\geqslant\neg f(b)\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\neg f(a)C\neg f(b).\text{ 因此}\neg f\in FE'.$$

(3)若$f,g\in FE'$,则$aCb\Rightarrow f(a)Cf(b),g(a)Cg(b)$

$$\Rightarrow\begin{cases}(1)f(a)\geqslant f(b)\geqslant\dfrac{1}{2}\text{且 }g(a)\geqslant g(b)\geqslant\dfrac{1}{2}\\ \text{或}(2)f(a)\geqslant f(b)\geqslant\dfrac{1}{2}\text{且 }g(a)\leqslant g(b)\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \text{或}(3)f(a)\leqslant f(b)\leqslant\dfrac{1}{2}\text{且 }g(a)\geqslant g(b)\geqslant\dfrac{1}{2}\\ \text{或}(4)f(a)\leqslant f(b)\leqslant\dfrac{1}{2}\text{且 }g(a)\leqslant g(b)\leqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

$$\begin{cases} (1)\begin{cases} f(a)\vee g(a)\geqslant f(b)\vee g(b)\geqslant \frac{1}{2}, \\ f(a)\wedge g(a)\geqslant f(b)\wedge g(b)\geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \\ 或(2)\begin{cases} f(a)\vee g(a)=f(a)\geqslant f(b)=f(b)\vee g(b)\geqslant \frac{1}{2}, \\ f(a)\wedge g(a)=g(a)\leqslant g(b)=f(b)\wedge g(b)\leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \\ 或(3)\begin{cases} f(a)\vee g(a)=g(a)\geqslant g(b)=f(b)\vee g(b)\geqslant \frac{1}{2}, \\ f(a)\wedge g(a)=f(a)\leqslant f(b)=f(b)\wedge g(b)\leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \\ 或(4)\begin{cases} f(a)\vee g(a)\leqslant f(b)\vee g(b)\leqslant \frac{1}{2}, \\ f(a)\wedge g(a)\leqslant f(b)\wedge g(b)\leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} (f(a)\vee g(a))C(f(b)\vee g(b)), \\ (f(a)\wedge g(a))C(f(b)\wedge g(b)). \end{cases}$$

因此，$f\vee g, f\wedge g\in FE'$.

由于 FE 是最小类，因此 $FE'=FE$.

定理 5.1.1 说明，模糊逻辑公式 f 中变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 赋值越清晰，则 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 取值越清晰，对应到模糊命题公式 $A=A(P_1, P_2, \cdots P_n)$，命题变元 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 的真值 $(T(P_1), T(P_2), \cdots, T(P_n))$ 越清晰（亦即 $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 涉及的概念模糊程度越小），则真值 $T(A)$ 越清晰（亦即所组成的命题 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 的模糊程度越小）. 这是符合实际的.

比较布尔函数与模糊逻辑公式的定义，显见，如果将布尔函数中变元 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 取值范围扩充到 $[0,1]^n$，则布尔函数可以扩充为逻辑函数公式. 反之将一个模糊逻辑公式的变元 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的取值范围限制在 $\{0,1\}^n$ 上，模糊逻辑公式是否退化为一个布尔函数呢？结论是肯定的.

定理 5.1.2 设 $f\in FE$ 是 n 元 F 公式，限制变元 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\{0,1\}^n$，则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\{0,1\}$.

证明 令 $FE'=\{f\mid f\in FE, 满足性质(A)\}$

性质 (A)：$\forall(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\{0,1\}^n\Rightarrow f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\{0,1\}$. 不难验证 $FE'=FE$.（证明留给读者）

定理 5.1.2 说明一个 n 元 F-公式 f，限制变元在 $\{0,1\}^n$ 中取值，则 f 退化成布

尔函数.（$[0,1]$，$\vee$，$\wedge$，$\neg$）为优软代数，因此（$[0,1]^{[0,1]^n}$，$\vee$，$\wedge$，$\neg$）也为优软代数. 又 $FE\subseteq[0,1]^{[0,1]^n}$ 且对 $\vee$，$\wedge$，$\neg$ 作有限次运算封闭，因此（FE，$\vee$，$\wedge$，$\neg$）是（$[0,1]^{[0,1]^n}$，$\vee$，$\wedge$，$\neg$）的子软代数（只能进行有限次运算，非完全的）.

为了介绍模糊逻辑公式的范式，下面，我们称变量 x_k 和 $\bar{x}_k=1-x_k$ 为字（用 p_k 表示，即 $p_k=x_k$ 或 $\bar{x}_k$），将一些字的析取式 $\bigvee\limits_{i=1}^{m}p_i$（$p_i$ 是字）称为子句；字的合取式 $\bigwedge\limits_{i=1}^{m}p_i$ 称为字组（以后以 p 表示字，ϕ 表示字组，ψ 表示子句）.

定义 5.1.5 形如

$$f=\bigvee_{j=1}^{m}\phi_j \quad (m\geqslant 1) \tag{5.3}$$

（其中 ϕ_j 是字组）的 F-公式称为析取范式.

形如

$$f=\bigwedge_{j=1}^{m}\psi_j \quad (m\geqslant 1) \tag{5.4}$$

（其中 ψ_j 是子句）的 F-公式称为合取范式.

定理 5.1.3 设 $f\in FE$ 是一个 n 元 F-公式，且 $f\neq 0,1$. 则 f 的析取范式存在.

证明 令 $FE'=\{f\mid f\in FE\setminus\{0,1\}, f\text{ 析取范式存在}\}$，则 $FE'\cup\{0,1\}\subseteq FE$.

(1) 显然 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 本身是析取范式，因此

$$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq FE', \quad \{0,1,x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq FE'\cup\{0,1\}.$$

(2) 设 $f\in FE'\cup\{0,1\}$. 若 $f=0$，则 $\neg f=1$；若 $f=1$，则 $\neg f=0$；若 $f\in FE'$，则存在析取范式

$$f=\bigvee_{j=1}^{m}\left(\bigwedge_{i_j=1}^{l_j}p_{i_jj}\right)(p_{i_jj}\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n\})$$

$$\neg f=\bigwedge_{j=1}^{m}\left(\bigvee_{i_j'=1}^{l_j}\bar{p}_{i_j'j}\right)(\bar{p}_{i_jj}\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n\})$$

利用软代数运算规律可以将 $\neg f$ 写成析取范式. 因此 $\neg f\in FE'$. 于是

$$f\in FE'\cup\{0,1\}\Rightarrow\neg f\in FE'\cup\{0,1\}$$

(3) 设 $f,g\in FE'\cup\{0,1\}$.

若 f,g 有一为 0（不妨设 $f=0$），则 $f\wedge g=0$，$f\vee g=g\in FE'\cup\{0,1\}$

若 f,g 有一为 1（不妨设 $f=1$），则 $f\vee g=1$，$f\wedge g=g\in FE'\cup\{0,1\}$

若 $f,g\in FE'$，（f,g 均不为 0,1），则存在析取范式

$$f=\bigvee_{j=1}^{m}\left(\bigwedge_{i_j=1}^{l_j}p_{i_jj}\right)(p_{i_jj}\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n\})$$

$$g=\bigvee_{j=1}^{m'}\left(\bigwedge_{i_{j'}=1}^{l_j'}p_{i_{j'}j'}\right)(p_{i_{j'}j'}\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n\})$$

令 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{2}$. 则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}$$

$$(f\vee g)(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(f\wedge g)(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}$$

于是

$$f\vee g,\ f\wedge g\notin\{0,1\}.$$

利用软代数运算规律，可以将

$$f\vee g=\left(\bigvee_{j=1}^{m}\left(\bigwedge_{i_j=1}^{l_j}p_{i_jj}\right)\right)\vee\left(\bigvee_{j'=1}^{m'}\left(\bigwedge_{i_{j'}=1}^{l_{j'}}p_{i_{j'}j'}\right)\right)$$

$$f\wedge g=\left(\bigvee_{j=1}^{m}\left(\bigwedge_{i_j=1}^{l_j}p_{i_jj}\right)\right)\wedge\left(\bigvee_{j'=1}^{m'}\left(\bigwedge_{i_{j'}=1}^{l_{j'}}p_{i_{j'}j'}\right)\right)$$

写成析取范式. 因此 $f\vee g$、$f\wedge g\in FE'$. 于是

$$f,g\in FE'\cup\{0,1\}\Rightarrow f\vee g,\ f\wedge g\in FE'\cup\{0,1\}$$

由于 FE 是最小类，所以 $FE'\cup\{0,1\}=FE$. 即 $FE'=FE\setminus\{0,1\}$.

类似地我们有以下定理.

定理 5.1.4　设 $f\in EF$ 是一个 n 元 F-公式，且 $f\neq 0,1$，则 f 的合取范式存在.

5.1.6　α-真式

定义 5.1.6　设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 元 F-公式，对 $\alpha\in[0,1]$，令

$$f_\alpha:[0,1]^n\to\{0,1\},\ f_\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}1,\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\alpha,\\0,\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)<\alpha.\end{cases}$$

$$f_{\underset{\cdot}{\alpha}}:[0,1]^n\to\{0,1\},\ f_{\underset{\cdot}{\alpha}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}1,\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>\alpha,\\0,\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\alpha.\end{cases}$$

称 f_α 为 f 的 α 截公式，$f_{\underset{\cdot}{\alpha}}$ 为 f 的 α 强截公式.

定义 5.1.7　设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 元 F-公式.

(1) 若 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$，$f_\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$，称 f 为 α-真式.

(2) 若 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$，$f_{\frac{1}{2}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$，称 f 为模糊真式（或称 f 为相容的），简称 F-真式.

(3) 若 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$，$f_{\frac{1}{2}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，称 f 为模糊假式（或称 f 为不相容的），简称 F-假式.

显然，f 为模糊真式 $\Leftrightarrow\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\frac{1}{2}$；$f$ 为模糊假式 $\Leftrightarrow\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\frac{1}{2}$.

f是α-真式$\Leftrightarrow \forall (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n, f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\alpha$.

定义 5.1.8 设模糊命题公式 $A=A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 所对应的 F-公式为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则

(1)若f是α-真式，则称 F 为 α-真式.

(2)若f是F-真式，则称 F 为 F-真式.

(3)若f是F-假式，则称 F 为 F-假式.

由于$\neg A\vee A$，$\neg A\wedge A$ 分别与 F-公式 $\bar{x}\vee x$，$\bar{x}\wedge x$ 对应（这里 $\bar{x}=1-x$），而 $\bar{x}\vee x\geqslant\frac{1}{2}$，$\bar{x}\wedge x\leqslant\frac{1}{2}$. 因此$\neg A\vee A$ 是 F-真式，$\neg A\wedge A$ 是 F-假式.

注意：一个 F-公式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可以既不是 F-真式，也不是 F-假式.

F-真式与 F-假式限制到二值逻辑，分别与永真式与永假式对应. 为了证明这个事实，先证明两个引理.

引理 5.1.1 (1)一个子句 ψ 是 F-真式，当且仅当 ψ 含有对称变量对$(x_k,\bar{x}_k)$；

(2)一个字组 ϕ 是 F-假式，当且仅当 ϕ 含有对称变量对$(x_k,\bar{x}_k)$.

证明 仅证(1)，(2)的证明类似.

设子句 $\psi=\bigvee\limits_{j=1}^{m}p_j$ 是 F-真式，且不含任何对称变量对. 令

$$x_k=\begin{cases}0, & \text{当 } x_k \text{ 在 } \psi \text{ 中出现}(\bar{x}_k \text{ 必不在 } \psi \text{ 中})\\ 1, & \text{当 } \bar{x}_k \text{ 在 } \psi \text{ 中出现}(x_k \text{ 必不在 } \psi \text{ 中})\\ \frac{1}{2}, & \text{其他}\end{cases}$$

于是 ψ 中出现的字均取值 0，于是对这组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0<\frac{1}{2}$，与 ψ 是 F-真式矛盾. 因此若子句是 F-真式，则至少含有一对称变量对$(x_k,\bar{x}_k)$.

反之，设 ψ 中含有对称变量对$(x_k,\bar{x}_k)$，则

$$\psi=(x_k\vee\bar{x}_k)\vee p_1\vee\cdots\vee p_l$$

于是$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

$$\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant x_k\vee\bar{x}_k\geqslant\frac{1}{2}$$

因此 ψ 是 F-真式.

引理 5.1.2 (1)合取范式$f=\bigwedge\limits_{i=1}^{l}\psi_i$($\psi_i$ 是子句)是 F-真式当且仅当一切子句 ψ_i 是 F-真式.

(2)析取范式$f=\bigvee\limits_{i=1}^{l}\phi_i$($\phi_i$ 字组)是 F-假式当且仅当一切字组 ϕ_i 是 F-假式.

证明 仅证(1)，将(2)留给读者证明.

$$f\text{是}F\text{-真式}\Leftrightarrow\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n),f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\bigwedge_{i=1}^{l}\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\frac{1}{2}(i=1,2,\cdots,l)$$

$$\Leftrightarrow\psi_i\text{ 是 }F\text{-真式 }(i=1,2,\cdots,l).$$

定理 5.1.5 设f是n元F-公式,则:

(1)f是F-真式当且仅当限制在二值逻辑中(即限制变元$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$)是永真式.

(2)f是F-假式当且仅当限制在二值逻辑中是永假式.

证明 仅证(1),(2)的证明类似.

1. 设f是F-真式,则$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\frac{1}{2}$

限制$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$,由定理5.1.2,$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}$.于是$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$,恒有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}\cap\left[\frac{1}{2},1\right]=\{1\}.$$

因此在二值逻辑中,f是永真式.

2. 设限制在二值逻辑中,f是永真式,将f写成合取范式$f=\bigwedge_{i=1}^{L}\psi_i$.考虑每个子句$\psi_i$,

$$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$$

$$\Rightarrow\bigwedge_{i=1}^{l}\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$$

$$\Rightarrow\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1(i=1,2,\cdots,l)$$

可证ψ_i中至少含有一对变量对$(x_k,\bar{x}_k)$,根据引理5.1.1知每个子句ψ_i是F-真式,又根据引理5.1.2知f是F-真式.

§5.2 模糊逻辑公式的化简

我们把对应的逻辑公式相等的模糊命题公式称为等价命题公式.因而可以通过模糊逻辑公式的化简来进行对模糊命题公式的化简.由于$(FE,\vee,\wedge,\neg)$是软代数而非布尔代数,$(FE,\vee,\wedge,\neg)$缺少补余律,因而模糊逻辑公式的化简问题与布尔函数的化简有较大差异.在模糊逻辑公式化简问题的研究中,关于模糊蕴涵关系及不可约元的概念是非常重要的.

定义 5.2.1 (1)设f, f'为n元F-公式,如果$\forall (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$,恒有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant f'(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{5.5}$$

那么称f模糊蕴涵f',记$f\xrightarrow{F}f'$,并称f是f'的模糊蕴涵项(简称F-蕴涵项). 称f'是f的模糊涵项(简称F-涵项).

(2)若$f\xrightarrow{F}f'$,且存在$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$使

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)<f'(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{5.6}$$

则称f真模糊蕴涵f'. 此时称f为f'的真F-蕴涵项,称f'为f的真F-涵项.

显然有

$$x\xrightarrow{F}x\vee y,\quad x\wedge y\xrightarrow{F}x,\quad x\wedge\bar{x}\xrightarrow{F}y\vee\bar{y} \tag{5.7}$$

下面两个定理明显成立.

定理 5.2.1 设$f\xrightarrow{F}f'$,若f是α-真式,则f'也是α-真式. 限制在二值逻辑中,若f是永真式,则f'也是永真式.

定理 5.2.2 模糊蕴涵关系$\xrightarrow{F}$满足:

(1)自反性:$f\xrightarrow{F}f$;

(2)反对称性:$f\xrightarrow{F}f', f'\xrightarrow{F}f\Rightarrow f=f'$;

(3)传递性:$f\xrightarrow{F}f', f'\xrightarrow{F}f''\Rightarrow f\xrightarrow{F}f''$;

(4)$f\xrightarrow{F}f'\Rightarrow f\vee f'=f'\Leftrightarrow f\wedge f'=f$.

定理 5.2.2 说明$\xrightarrow{F}$是FE中的偏序,且格$(FE,\xrightarrow{F})$与$(FE,\vee,\wedge)$等价.

模糊蕴涵关系$\xrightarrow{F}$在某种意义上可以看做二值逻辑中蕴涵关系的推广. 在二值逻辑中,如果命题$A\to B$为真,即其真值$T(A\to B)=1$,那么称A蕴涵B. 对含有命题变元$P_1,P_2,\cdots,P_n$的两个命题公式$F(P_1,P_2,\cdots,P_n)$与$F'(P_1,P_2,\cdots,P_n)$来说,f蕴涵F'是指对一切命题变元$(P_1,P_2,\cdots,P_n)$,恒有$T(F\to F')=1$. 设f与f'分别是对应F与F'的布尔函数,于是

$$\begin{aligned}
&\forall (P_1,P_2,\cdots,P_n), T(F\to F')=T(\neg F\vee F')=1\\
&\Leftrightarrow \forall (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n,\text{恒有}\\
&\neg f\vee f'=(1-f)\vee f'=1\\
&\Leftrightarrow \forall (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n,\text{恒有}\\
&\text{“}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1\Rightarrow 1-f=0\\
&\Rightarrow f'(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1\text{”}\\
&\Leftrightarrow \forall (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n,\text{恒有}\\
&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant f'(x_1,x_2,\cdots,x_n)
\end{aligned}$$

因此在二值逻辑中，称命题公式 F 蕴涵 F'（或称它们对应的布尔函数 f 蕴涵 f'）当且仅当

$$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \{0,1\}^n, \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant f'(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

此时若 $F(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 为永真式，则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv 1$，因此 $f'(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv 1$，即 $F'(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 也是永真式.

模糊逻辑公式的化简是将一个析取范式化简为一个唯一确定的由互素的并不可约元组成的析取式（即主析取范式）或将一个合取范式化简为一个唯一确定的由互素的交不可约元组成的合取式（即主合取范式）. 为此，我们先定义字组的并可约元和并不可约元，子句的交可约元和交不可约元以及模糊逻辑公式的互素概念.

定义 5.2.2　(1) 字组 ϕ 称为是并可约元（或称为析取可约元）当且仅当 ϕ 可以表示为

$$\phi = \bigvee_{j=1}^{m} \phi_j \quad (m > 1)$$

且 $\phi_j \xrightarrow{F} \phi$ 是真 F-蕴涵. 若 ϕ 非并可约元，则称为并不可约元.

(2) 子句 ψ 称为是交可约元（或称为合取可约元）当且仅当 ψ 可以表示为

$$\psi = \bigwedge_{j=1}^{m} \psi_j \quad (m > 1)$$

且 $\psi \xrightarrow{F} \psi_j$ 是真 F-蕴涵. 若 ψ 非交可约元，则称为交不可约元.

定义 5.2.3　F-公式 f 与 g 称为是互素的当且仅当 $f \overset{F}{\not\to} g$（f 不 F-蕴涵 g）且 $g \overset{F}{\not\to} f$.

定理 5.2.3　(1) F-公式 f, g 互素 $\Leftrightarrow f, g \xrightarrow{F} f \vee g$ 是真 F-蕴涵.

(2) F-公式 f, g 互素 $\Leftrightarrow f \wedge g \xrightarrow{F} f, g$ 是真 F-蕴涵.

证明　仅证(1).

$$f, g \xrightarrow{F} f \vee g \text{ 是真 } F\text{-蕴涵} \Leftrightarrow f \neq f \vee g \text{ 且 } g \neq f \vee g$$

$$\Leftrightarrow g \overset{F}{\not\to} f \text{ 且 } f \overset{F}{\not\to} g \Leftrightarrow f, g \text{ 互素}.$$

引理 5.2.1　设 $\phi^{(1)} = \bigwedge_{j=1}^{m} x_j^{(1)}$，$\phi^{(2)} = \bigwedge_{i=1}^{i} x_i^{(2)}$ 是两个字组，$x_j^{(1)}, x_i^{(2)} \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n\}$，则：

(1) $\phi^{(2)} \xrightarrow{F} \phi^{(1)}$ 当且仅当 $\phi^{(1)}$ 中的字 $x_i^{(1)}$ 在 $\phi^{(2)}$ 中一定出现；

(2) $\phi^{(2)} \xrightarrow{F} \phi^{(1)}$ 是真 F-蕴涵当且仅当 $\phi^{(1)}$ 中的字 $x_i^{(1)}$ 在 $\phi^{(2)}$ 中一定出现且 $\phi^{(2)}$ 中至少有一字 $x_{i1}^{(1)}$ 在 $\phi^{(1)}$ 中不出现.

证明　(1) 设 $\phi^{(2)} \xrightarrow{F} \phi^{(1)}$ 且 $\phi^{(1)}$ 中存在字 $x_j^{(1)}$ 在 $\phi^{(2)}$ 中不出现，令

$$x_k=\begin{cases}0, & 当\ x_k\ 是\ x_{j_1}^{(1)}\\ 1, & 当\ \bar{x}_k\ 是\ x_{j_1}^{(1)}\\ \frac{1}{2}, & 其他\end{cases}$$

则字 $x_{j_1}^{(1)}=0$ 而与 $x_{j_1}^{(1)}$ 不相同的字均为 $\frac{1}{2}$ 或 1. 由于 $\phi^{(1)}$ 中只含有 $x_{j_1}^{(1)}$ 而 $\phi^{(2)}$ 中不含有 $x_{j_1}^{(1)}$，于是对这组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$\phi^{(1)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\phi^{(2)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\frac{1}{2}$$

与 $\phi^{(2)}\xrightarrow{F}\phi^{(1)}(\phi^{(2)}\leqslant\phi^{(1)})$ 的假设矛盾. 因此 $\phi^{(2)}\xrightarrow{F}\phi^{(1)}\Rightarrow\phi^{(1)}$ 中的字 $x_{j_1}{}^{(1)}$ 在 $\phi^{(2)}$ 中必出现.

反之，若 $\phi^{(1)}$ 中的字 $x_{i_1}{}^{(2)}$ 在 $\phi^{(2)}$ 中必出现，显然 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，恒有

$$\phi^{(2)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\phi^{(1)}(x_1,x_2,\cdots,x_n).\ 即\ \phi^{(2)}\xrightarrow{F}\phi^{(1)}.$$

(2) 设 $\phi^{(2)}\xrightarrow{F}\phi^{(1)}$ 是真 F-蕴涵，且 $\phi^{(2)}$ 中的字 $x_i^{(2)}$ 在 $\phi^{(1)}$ 中都出现，则由 (1) 知 $\phi^{(1)}\xrightarrow{F}\phi^{(2)}$ 与 $\phi^{(2)}$ 真 F-蕴涵 $\phi^{(1)}$ 矛盾. 因此，由 $\phi^{(2)}\xrightarrow{F}\phi^{(1)}$ 是真 F-蕴涵，则 $\phi^{(1)}$ 中的字在 $\phi^{(2)}$ 中一定出现且 $\phi^{(2)}$ 中至少有一字 $x_i^{(2)}$ 在 $\phi^{(1)}$ 中不出现.

反之，若 $\phi^{(1)}$ 中的字在 $\phi^{(2)}$ 中一定出现且 $\phi^{(2)}$ 中至少有一字 $x_{i_1}^{(2)}$ 在 $\phi^{(1)}$ 中不出现，则由前一条件知 $\phi^{(2)}\xrightarrow{F}\phi^{(1)}$，而由后一条件，按 (1) 中 x_k 的取值法，有

$$\phi^{(2)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\frac{1}{2}>0=\phi^{(1)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

因此 $\phi^{(2)}$ 是真 F-蕴涵 $\phi^{(1)}$.

定理 5.2.4 在 n 元 F-公式所形成的软代数中，字组 ϕ 是并不可约元当且仅当下面两种情况之一成立.

(1) ϕ 不含任何对称变量对 $(x_k,\bar{x}_k)$.

(2) ϕ 含每一变量且至少含有一对称变量对 $(x_k,\bar{x}_k)$.

证明 (1) "$\Leftarrow$"

① 设 ϕ 是不含任何对称变量对的字组.

$$\phi=\bigwedge_{j=1}^{m}x'_j,\quad x'_j\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n\}$$

假设 ϕ 是并可约元，则 $\phi=\bigvee_{i=1}^{m}\phi_i$ 且

$$\phi_i\xrightarrow{F}\phi\ 是真\ F\text{-蕴涵}\quad(i=1,2,\cdots,l).$$

由引理 5.2.1 知，ϕ 中的字在 ϕ_i 中出现且 ϕ_i 中至少有一字在 ϕ 中不出现. 于是可以将 ϕ_i 写成 $\phi_i=\phi\wedge\phi'_i$，ϕ'_i 中的字在 ϕ 中不出现. 令

$$x_k=\begin{cases}0, & 当\ x_k\ 在\ \phi\ 中出现\\ 1, & 当\ \bar{x}_k\ 在\ \phi\ 中出现\\ \frac{1}{2}, & 其他\end{cases}$$

则 ϕ 中出现的字均取值1,ϕ 中不出现的字均取值$\frac{1}{2}$或0. 于是

$$\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1,\ \phi_i'(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}或0.$$

$$\phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\phi\wedge\phi_i'\leqslant\frac{1}{2}$$

因为 $\phi=\bigvee_{i=1}^{l}\phi_i$,因此

$$\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\bigvee_{i=1}^{l}\phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\frac{1}{2}$$

与 $\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$ 矛盾. 所以 ϕ 是并不可约元.

② 设 ϕ 含每一变量且含对称变量对$(x_{k1},\bar{x}_{k1})$,假设 ϕ 是并可约元,类似①我们有 $\phi=\bigvee_{i=1}^{l}\phi_i$ 且 $\phi_i=\phi\wedge\phi_i'$,ϕ_i' 中的字在 ϕ 中不出现. 令

$$x_k=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 当\ x_k,\bar{x}_k\ 在\ \phi\ 中同时出现\\ 1, & 当\ \bar{x}_k\ 在\ \phi\ 中不出现(x_k\ 必出现)\\ 0, & 当\ x_k\ 在\ \phi\ 中不出现(\bar{x}_k\ 必出现)\end{cases}$$

于是 ϕ 中出现的字均取值$\frac{1}{2}$或1,不出现的字均取值0,对这组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

$$\phi_i'(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ \phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{2},\ \phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\phi\wedge\phi_i'=0$$

又因为 $\phi=\bigvee_{i=1}^{l}\phi_i$,因此 $\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\bigvee_{i=1}^{l}\phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$,与 $\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}$矛盾. 所以 ϕ 是并不可约元.

(2)"⇒"

设字组 ϕ 是并不可约元且 ϕ 不是(1)、(2)两种情况之一. 即 ϕ 含有某对称变量对$(x_{k_1},\bar{x}_{k_1})$且不含某变量 x_{k_2}(即不含字 $x_{k_2},\bar{x}_{k_2}$),由于

$$\begin{aligned}&x_{k_1}\wedge\bar{x}_{k_1}\leqslant x_{k_2}\vee\bar{x}_{k_2}\\ &\Rightarrow x_{k_1}\wedge\bar{x}_{k_1}=(x_{k_1}\wedge\bar{x}_{k_1})\wedge(x_{k_2}\vee\bar{x}_{k_2})\\ &\quad=(x_{k_1}\wedge\bar{x}_{k_1}\wedge x_{k_2})\vee(x_{k_1}\wedge\bar{x}_{k_1}\wedge\bar{x}_{k_2})\end{aligned}$$

而

$$\phi=(x_{k_1}\wedge\bar{x}_{k_1})\wedge\phi'(\phi'不含\ x_{k_1},\bar{x}_{k_1},x_{k_2},\bar{x}_{k_2})$$

$$\Rightarrow\phi=(x_{k_1}\wedge\bar{x}_{k_1}\wedge x_{k_2}\wedge\phi')\vee(x_{k_1}\wedge\bar{x}_{k_1}\wedge\bar{x}_{k_2}\wedge\phi')$$

$(x_{k_1} \wedge \bar{x}_{k_1} \wedge x_{k_2} \wedge \phi') \xrightarrow{F} \phi$ 且 x_{k_2} 在 ϕ 中不出现，因此是真 F-蕴涵. 同样 $(x_{k_1} \wedge \bar{x}_{k_1} \wedge \bar{x}_{k_2} \wedge \phi') \xrightarrow{F} \phi$ 也是真 F-蕴涵，这与 ϕ 是并不可约元矛盾.

类似地可以证明以下定理.

定理 5.2.5 在 n 元 F-公式所形成的软代数中，子句 ψ 是交不可约元当且仅当下面两种情况之一成立.

(1) ψ 不含任何对称变量对 $(x_k, \bar{x}_k)$.

(2) ψ 含每一变量且至少含有一对称变量对 $(x_k, \bar{x}_k)$.

定义 5.2.4 (1) n 元 F-公式的析取范式 $f = \bigvee_{j=1}^{m} \phi_j (m \geqslant 1)$ 称为主析取范式当且仅当所含字组 ϕ_j 都是并不可约元且两两互素.

(2) n 元 F-公式的合取范式 $f = \bigwedge_{i=1}^{m} \psi_i (m \geqslant 1)$ 称为主合取范式当且仅当所含子句 ψ_i 都是交不可约元且两两互素.

定理 5.2.6 n 元 F-公式 f 的主析取范式是唯一的.

证明 设 $f = \bigvee_{j=1}^{m} \phi_j = \bigvee_{i=1}^{l} \phi'_i (m \geqslant 1, l \geqslant 1)$ 为 f 的两个主析取范式.

(1) 若 $m = 1$，则由于 $f = \phi_1$ 是并不可约元，于是 $l = 1$ 且 $f = \phi_1 = \phi'_1$.

(2) 若 $m > 1$，则 $l > 1$，对任一 ϕ_j，由于 ϕ_j 是并不可约元，由定理 5.1.3 知只有两种可能.

① 如果 ϕ_j 中不含任何对称变量对 $(x_k, \bar{x}_k)$，令

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{当 } x_k \text{ 在 } \phi_j \text{ 中出现}(\bar{x}_k \text{ 必不出现}) \\ 0, & \text{当 } \bar{x}_k \text{ 在 } \phi_j \text{ 中出现}(x_k \text{ 必不出现}) \\ \dfrac{1}{2}, & \text{其他} \end{cases}$$

于是在 ϕ_j 中出现的字均取值 1，不出现的字均取值 $\frac{1}{2}$ 或 0. 因此

$$1 = \phi_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant \bigvee_{i=1}^{l} \phi'_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \Rightarrow \exists\, i_0 \in \{1, 2, \cdots, l\}$$

使
$$\phi'_{i_0}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1$$

$\Rightarrow \phi'_{i_0}$ 不含在 ϕ_j 中不出现的字由引理 5.2.1 $\Rightarrow \phi_j \xrightarrow{F} \phi'_{i_0}$.

② 如果 ϕ 中含每一变量且至少含一对称变量对 $(x_{k_1}, \bar{x}_{k_1})$. 令

$$x_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{当 } x_k, \bar{x}_k \text{ 在 } \phi_j \text{ 中出现} \\ 1, & \text{当 } \bar{x}_k \text{ 在 } \phi_j \text{ 中不出现}(x_k \text{ 一定出现}) \\ 0, & \text{当 } x_k \text{ 在 } \phi_j \text{ 中不出现}(\bar{x}_k \text{ 一定出现}) \end{cases}$$

于是在 ϕ_j 中出现的字均取值 $\frac{1}{2}$ 或 1，不出现的字均取值 0. 因此

$$\frac{1}{2}=\phi_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\bigvee_{i=1}^{l}\phi_i'(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$\Rightarrow\exists\, i_0\in\{1,2,\cdots,l\}\text{ 使 }\phi'_{i_0}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\phi'_{i_0}\text{中不含在 }\phi_j\text{ 中不出现的字}\Rightarrow\phi_j\xrightarrow{F}\phi'_{i_0}$$

①、②说明，对任意 ϕ_j，必存在 $\phi'_{i_0}(i_0\in\{1,2,\cdots,l\})$ 使 $\phi_j\xrightarrow{F}\phi'_{i_0}$. 由于 ϕ'_{i_0}是并不可约元，同样理由，一定存在 $\phi_{j_0}(j_0\in\{1,2,\cdots,m\})$ 使 $\phi'_{i_0}\xrightarrow{F}\phi_{i_0}$. 于是 $\phi_j\xrightarrow{F}\phi'_{i_0}\xrightarrow{F}\phi_{j_0}$，由于 $\phi_j(j=1,2,\cdots,m)$ 两两互素，只能 $\phi_j=\phi_{j_0}$，于是 $\phi'_{i_0}=\phi_j$. 这就是说，每一个 ϕ_j 必然是 ϕ'_i 中之一，同样每一个 ϕ'_i 也必然是 ϕ_j 中之一. 所以两个主析取范式含有完全相同的字组，因而主析取范式是唯一的.

为了证明 f 的主析取范式存在，先证明下面引理.

引理 5.2.2 设 ϕ 是由 $(x_1,x_2,\cdots,x_n,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$ 中的字组成的字组而且是并可约元，则存在 ϕ 的析取范式 $\phi=\bigvee_{j=1}^{m}\phi_j(m\geqslant 1)$，其中字组 ϕ_j 都是并不可约元.

证明 ϕ 是并可约元，按照定理 5.2.5，不妨设 ϕ 含对称变量对 $(x_{k_0},\bar{x}_{k_0})$ 且不含变量 $x_{k_1},\cdots,x_{k_l}(l\geqslant 1)$. 如果 $l=1$，令

$$\phi=(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0})\wedge\phi'(\phi'\text{中只缺变量 }x_{k_0},x_{k_1})$$

由于

$$(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0})=(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0})\wedge(x_{k_1}\vee\bar{x}_{k_1})=(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge x_{k_1})\vee(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_1})$$

于是

$$\phi=\phi_1\vee\phi_2 \tag{5.8}$$

$$\phi_1=x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge x_{k_1}\wedge\phi',\quad \phi_2=x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_1}\wedge\phi'$$

则 ϕ_1,ϕ_2 含变量对 $(x_{k_0},\bar{x}_{k_0})$ 且含全部变量，因而是并不可约元. 如果 $l=2$，令

$$\phi=(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0})\wedge\phi'\quad(\phi'\text{中只缺变量 }x_{k_0},x_{k_1},x_{k_2})$$

$$\begin{aligned}x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}&=(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0})\wedge(x_{k_1}\vee\bar{x}_{k_1})\wedge(x_{k_2}\vee\bar{x}_{k_2})\\&=(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge x_{k_1})\vee(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_1})\wedge(x_{k_2}\vee\bar{x}_{k_2})\\&=(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge x_{k_1}\wedge(x_{k_2}\vee\bar{x}_{k_2}))\vee(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge x_{k_1}\wedge(x_{k_2}\vee\bar{x}_{k_2}))\\&=(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge x_{k_1}\wedge x_{k_2})\vee(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge x_{k_1}\wedge\bar{x}_{k_2})\\&\quad\vee(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_1}\wedge x_{k_2})\vee(x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_1}\wedge\bar{x}_{k_2})\end{aligned}$$

于是

$$\phi=\phi_{11}\vee\phi_{12}\vee\phi_{21}\vee\phi_{22}=\bigvee_{i_1=1}^{2}\bigvee_{i_2=1}^{2}\phi_{i_1i_2} \tag{5.9}$$

$$\phi_{11}=x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge x_{k_1}\wedge x_{k_2}\wedge\phi'$$

$$\phi_{12}=x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge x_{k_1}\wedge\bar{x}_{k_2}\wedge\phi'$$

$$\phi_{21}=x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_1}\wedge x_{k_2}\wedge\phi'$$

$$\phi_{22}=x_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_0}\wedge\bar{x}_{k_2}\wedge\bar{x}_{k_2}\wedge\phi'.$$

$\phi_{i_1i_2}(i_1,i_2\in\{1,2\})$含变量对$(x_{k_0},\bar{x}_{k_0})$且含全部变量，因而是并不可约元，依次类推，对任何有限值$l(1\leqslant l\leqslant n-1)$，最终可得

$$\phi=\bigvee_{i_1=1}^{2}\cdots\bigvee_{i_l=1}^{2}\phi_{i_1i_2\cdots i_l}\tag{5.10}$$

$\phi_{i_1i_2\cdots i_l}(i_1,i_2,\cdots,i_l\in\{1,2\})$是并不可约元.

定理 5.2.7 设f是n元F-公式，且$f\neq0,1$. 则f的主析取范式存在.

证明 (1)根据定理5.1.3存在f的析取范式.

(2)在f的析取范式中，若有字组是并可约元，则根据定理5.1.4可以将f化为并不可约元的析取范式. 于是存在f的析取范式

$$f=\bigvee_{i=1}^{m}\phi_i\tag{5.11}$$

其实ϕ_i皆为并不可约元.

(3)在式(5.10)中，若存在$\phi_{i_1}\xrightarrow{F}\phi_{i_2}$，则$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，恒有

$$\phi_{i_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\phi_{i_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Rightarrow(\phi_{i_1}\vee\phi_{i_2})(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\phi_{i_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

于是$\phi_{i_1}\vee\phi_{i_2}=\phi_{i_2}$，可以在式(5.10)中删去$\phi_{i_1}$.

把式(5.10)中那些蕴涵其余字的字组全部删去（对互相蕴涵的两个字组保留其中一个）. 最终得到字组两两互素的析取范式

$$f=\bigvee_{j=1}^{i}\phi_j\tag{5.12}$$

由于式(5.11)是析取范式，其字组ϕ_j皆并不可约元，而且两两互素，因此式(5.9)即f的主析取范式.

定理 5.2.8 给出一个化简模糊逻辑公式的途径，其步骤如下：

(1)利用软代数运算公式，将F-公式f写成析取范式.

(2)对f中每一并可约元ϕ，将所缺变量x_k相应的$x_k\vee\bar{x}_k$与ϕ合取$\phi\wedge(x_k\vee\bar{x}_k)$. 然后再写成析取范式.

(3)将那些蕴涵其余字组的字组删去.

(4)所得最终表达式即f的主析取范式.

例 5.2.1 化简

$$f=z\wedge((\bar{y}\wedge(y\vee\bar{x})\vee(\bar{z}\wedge y\wedge x\wedge\bar{x}))\vee(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge((y\wedge x\wedge\bar{x})\vee z)).$$

解 (1)将f写成析取式

$$f=z\wedge((\bar{y}\wedge y)\vee(\bar{y}\wedge\bar{x})\vee(\bar{z}\wedge y\wedge x\wedge\bar{x}))$$
$$\vee(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge y\wedge x\wedge\bar{x})\vee(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge z)$$
$$=(z\wedge\bar{y}\wedge y)\vee(z\wedge\bar{y}\wedge\bar{x})\vee(z\wedge\bar{z}\wedge y\wedge x\wedge\bar{x})$$
$$\vee(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge y\wedge x\wedge\bar{x})\vee(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge z).$$

(2)第1,5项为并可约元

$$(z\wedge\bar{y}\wedge y)=(z\wedge\bar{y}\wedge y)\wedge(x\vee\bar{x})=(x\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z)$$
$$(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge z)=(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge z)\wedge(x\vee\bar{x})=(x\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{z})\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{z})$$

于是

$$f=(x\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z)$$
$$\vee(x\wedge\bar{x}\wedge y\wedge z\wedge\bar{z})\vee(x\wedge\bar{x}\wedge y\wedge y\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})$$
$$\vee(x\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{z})\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{z}).$$

(3)
$$\bar{x}\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z\xrightarrow{F}\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z$$
$$\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{z}\xrightarrow{F}\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z$$

于是

$$f=(x\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(x\wedge\bar{x}\wedge y\wedge z\wedge\bar{z})$$
$$\vee(x\wedge\bar{x}\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{z})$$

即f的主析取范式.

关于主合取范式,类似地存在以下定理.

定理 5.2.9 设f是n元F-公式,且$f\neq 0,1$,则f的主合取范式存在且唯一.(证明留给读者).

定理 5.2.10 设F-公式$\neg f$的主析取范式是

$$\neg f=\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j_i=1}^{l_i}x_{ij_i}\right)\tag{5.13}$$

则f的主合取范式是

$$f=\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j_i=1}^{l_i}\bar{x}_{ij_i}\right)\tag{5.14}$$

(需先证明ϕ是并不可约元$\Leftrightarrow\neg\ \phi$是交不可约元.证明留给读者).

§5.3 模糊逻辑公式与组合回路

作为F-公式的实际应用,这里简单叙述一下组合回路.由于F-公式不像二值逻辑中那样只取“0”或“1”值,因此在实际处理中会遇到问题.为了解决这个问题,可以在[0,1]上把F-公式分成有限个等级.

一般地,将[0,1]分成如下m个等级,

$$[0,1]=\bigcup_{i=1}^{m}C_i\quad C_i\cap C_j\neq\phi\ (i\neq j)\tag{5.15}$$

其中 $C_i=[t_{i-1},t_j)$, $1\leqslant i\leqslant m$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_m=1$.

设 F-公式 f 已表示为主析取范式，如果对 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$，

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C_j(1\leqslant j\leqslant m) \tag{5.16}$$

时，就说 F-公式 f 属于第 j 级.

我们举例说明如何找出 f 属于第 j 级的条件.

例 5.3.1 设

$$f(x,y,z)=(\bar{x}\wedge\bar{y})\vee(x\wedge y\wedge\bar{z}) \tag{5.17}$$

f 属于第 j 级的条件 $\Leftrightarrow f(x,y,z)\in C_j\Leftrightarrow t_{j-1}\leqslant f(x,y,z)<t_j$，即为

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\bar{x}\wedge\bar{y})\vee(x\wedge y\wedge\bar{z})\geqslant t_{j-1}\\(\bar{x}\wedge\bar{y})\vee(x\wedge y\wedge\bar{z})<t_j\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}\bar{x}\wedge\bar{y}\geqslant t_{j-1}\\\text{或 } x\wedge y\wedge\bar{z}\geqslant t_{j-1}\end{cases}\\\text{且}\begin{cases}\bar{x}\wedge\bar{y}<t_j\\\text{且 } x\wedge y\wedge\bar{z}<t_j\end{cases}\end{cases}$$

$$\left\{\begin{Bmatrix}x\leqslant 1-t_{j-1}\\\text{且}\\y\leqslant 1-t_{j-1}\end{Bmatrix}\quad\text{或}\quad\begin{Bmatrix}x\geqslant t_{j-1}\\\text{且}\\y\geqslant t_{j-1}\\\text{且}\\z\leqslant 1-t_{j-1}\end{Bmatrix}\right. \tag{5.18}$$

$$\left\{\begin{Bmatrix}x>1-t_j\\\text{或}\\y>1-t_j\end{Bmatrix}\quad\text{且}\quad\begin{Bmatrix}x<t_j\\\text{或}\\y<t_j\\\text{或}\\z>1-t_j\end{Bmatrix}\right. \tag{5.19}$$

可以看出 $f\in C_j$ 的上述不等式关系具有如下特点：

(1) 联系于不等号 $\geqslant$ 的单字在 f 中是肯定形式；联系不等号 $\leqslant$ 的单字在 f 中是否定形式。如式(5.18)中，$x\geqslant t_{j-1}$ 的 x 在式(5.17)中是字组 $(x\wedge y\wedge\bar{z})$ 中的 x，它是肯定形式，$x\leqslant 1-t_{j-1}$ 的 x 在式(5.17)中是字组 $(\bar{x}\wedge\bar{y})$ 中的 x，它是否定形式.

(2) 联系于不等号 $>$ 的单字在 f 中是否定形式；联系于不等号 $<$ 的单字在 f 中是肯定形式.

利用(1)和(2)的特点，给定 F-公式 f 的主析取式，就可以系统地求出类似式(5.18)与式(5.19)的不等式.

例 5.3.2 $g(x,t,z,u)=(\bar{x}\wedge y\wedge\bar{z})\vee(x\wedge y\wedge\bar{u})\vee(x\wedge\bar{z}\wedge u)$，使用关于 t_{j-1} 的特点(1)，即可以得出

$$\begin{cases} x \leqslant 1 - t_{j-1} \\ \text{且} \\ y \geqslant t_{j-1} \\ \text{且} \\ z \leqslant 1 - t_{j-1} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x \geqslant t_{j-1} \\ \text{且} \\ y \geqslant t_{j-1} \\ \text{且} \\ u \leqslant 1 - t_{j-1} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x \geqslant t_{j-1} \\ \text{且} \\ z \leqslant 1 - t_{j-1} \\ \text{且} \\ u \geqslant t_{j-1} \end{cases}$$

关于 t_j 使用(2)的特点,得出

$$\begin{cases} x > 1 - t_j \\ \text{或} \\ y < t_j \\ \text{或} \\ z > 1 - t_j \end{cases} \text{且} \begin{cases} x < t_j \\ \text{或} \\ y < t_j \\ \text{或} \\ u > 1 - t_j \end{cases} \text{且} \begin{cases} x < t_j \\ \text{或} \\ z > 1 - t_j \\ \text{或} \\ u < t_j \end{cases}$$

对应例 5.3.1 中 F-公式(5.17)的逻辑回路如图 5.1 所示.

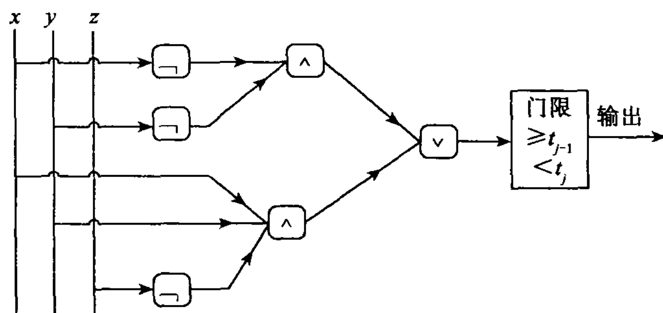


图 5.1

可以按图 5.1 设计一个判断方案. 令

$$J = \{(x,y,z) \mid (x,y,z)\text{满足条件式}(5.18)\text{且式}(5.19)\}.$$

当 $(x,y,z) \in J$ 时,则得到输出信号,表示此时 $f(x,y,z)$ 属于第 j 级,当 $(x,y,z) \notin J$ 时,则得不到输出信号. 如图 5.2 所示.

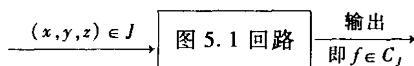


图 5.2

把 F-公式分成若干级,寻求 f 属于各级的条件,称为 F-公式的分解. 该问题的逆问题是给出 F-公式的一种分解,求出满足这种分解条件的 F-公式. 称这样的问题为 F-公式的合成.

例如当(x,y,z)满足式(5.18)及式(5.19)的条件下，求满足 $t_{j-1}\leqslant f(x,y,z)<t_j$ 的 F-公式f. 显然可以从式(5.18)、式(5.19)中直接求得

$$f(x,y,z)=(\bar{x}\wedge\bar{y})\vee(x\wedge y\wedge\bar{z})$$

往往在给出条件 J 中，限制$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的边界值与 t_{j-1},t_j 无关，这样寻求 F-公式f就遇到困难. 但是我们可以设计一种等效的逻辑回路，当$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in J$时，可以得到输出信号(表示$f\in[t_{j-1},t_j)$).

例 5.3.3 设变量 x,y,z 满足条件

$$\begin{cases}x\leqslant a_1\\ 且\\ y\geqslant a_2\end{cases} 或 \begin{cases}x\geqslant a_3\\ 且\\ y\geqslant a_4\\ 且\\ z\leqslant a_5\end{cases} \tag{5.20}$$

$$\begin{cases}x>a_6\\ 或\\ y>a_7\end{cases} 且 \begin{cases}x<a_8\\ 或\\ y<a_9\\ 或\\ z>a_{10}\end{cases} \tag{5.21}$$

$a_1,a_2,\cdots,a_{10}\in[0,1]$，求 F-公式f使得$f(x,y,z)\in[t_{j-1},t_j)$.

解 由于 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}\in[0,1]$与 t_{j-1},t_j 无关，直接寻求 F-公式f是困难的. 处理这样的问题，可以乘以适当的因子 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}$，使得式(5.20)与式(5.21)改为

$$\begin{cases}\omega_1x\leqslant a_1\omega_1=1-t_{j-1}\\ 且\\ \omega_2y\geqslant a_2\omega_2=t_{j-1}\end{cases} 或 \begin{cases}\omega_3x\geqslant a_3\omega_3=t_{j-1}\\ 且\\ \omega_4y\geqslant a_4\omega_4=t_{j-1}\\ 且\\ \omega_5z\leqslant a_5\omega_5=1-t_{j-1}\end{cases} \tag{5.22}$$

$$\begin{cases}\omega_6x>a_6\omega_6=1-t_j\\ 或\\ \omega_7y<a_7\omega_7=t_j\end{cases} 且 \begin{cases}\omega_8x<a_8\omega_8=t_j\\ 或\\ \omega_9y<a_9\omega_9=t_j\\ 或\\ \omega_{10}z>a_{10}\omega_{10}=1-t_j\end{cases} \tag{5.23}$$

于是 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}$可以确定.

$$\omega_1=\frac{1-t_{j-1}}{a_1},\quad \omega_2=\frac{t_{j-1}}{a_2},\quad \omega_3=\frac{t_{j-1}}{a_3},\quad \omega_4=\frac{t_{j-1}}{a_4},\quad \omega_5=\frac{1-t_{j-1}}{a_5},$$

$$\omega_6=\frac{1-t_{j-1}}{a_6},\quad \omega_7=\frac{t_j}{a_7},\quad \omega_8=\frac{t_j}{a_8},\quad \omega_9=\frac{t_j}{a_9},\quad \omega_{10}=\frac{1-t_j}{a_{10}}$$

满足式(5.22)与式(5.23)的 F-公式分别为

$$f_1(x,y,z)=((\overline{\omega_1 x})\wedge(\omega_2 y))\vee(\omega_3 x)\wedge(\omega_4 y)\wedge(\overline{\omega_5 z})$$

$$f_2(x,y,z)=((\overline{\omega_6 x})\wedge(\omega_7 y))\vee((\omega_8 x)\wedge\omega_9 y\wedge(\overline{\omega_{10} z})).$$

需要构造一个等效的逻辑回路，使得输出条件满足 $f_1\geqslant t_{j-1}$ 且 $f_2<t_j$. 我们称该逻辑回路为合成问题的组合回路，该逻辑回路可以用图5.3表示. 按图5.3的组合回路设计判别方案，显然当 $(x,y,z)\in J$ 时，则得到输出信号，否则得不到输出信号.

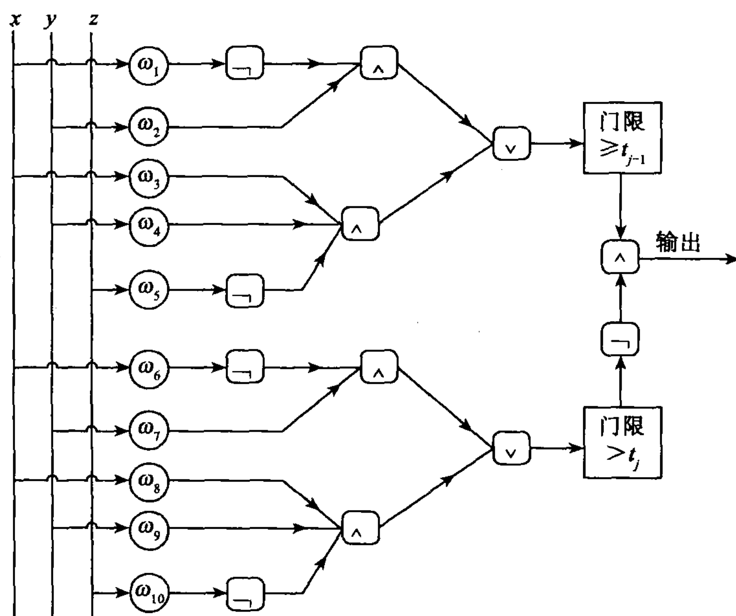


图 5.3

§5.4 模糊逻辑的演绎推理

5.4.1 二值逻辑演绎推理

二值逻辑中有两个常用的推理规则：

(1)(MP)：$P,P\to Q\Rightarrow Q$

$$(\text{即 } T(P)=1,T(P\to Q)\equiv 1\Rightarrow T(Q)=1) \tag{5.24}$$

(2)(MT):$\neg Q, P\to Q \Rightarrow \neg P$

$$(\text{即 } T(Q)=0, T(P\to Q)\equiv 1 \Rightarrow T(P)=0) \tag{5.25}$$

(MP)为肯定前件的假言推理,其含义是:如果"若 P 则 Q"为定理,前件 P 成立,那么后件 Q 成立.

(MT)为否定后件的假言推理,其含义是:如果"若 P 则 Q"为定理,后件 Q 不成立,那么前件 P 不成立.

(1)、(2)的正确性是明显的,事实上令 $p=T(P)$,$q=T(Q)$,则命题公式 $P\to Q$ 对应布尔函数

$$f(p,q)=\neg p\vee q=(1-p)\vee q \tag{5.26}$$

如果 $P\to Q$ 是定理(永真式)即 $(1-p)\vee q\equiv 1$,显然有

(1)$T(P)=p=1\Rightarrow(1-1)\vee q\equiv 1\Rightarrow q=T(Q)=1$;

(2)$T(Q)=q=0\Rightarrow(1-p)\vee 0\equiv 1\Rightarrow p=T(P)=0$.

为了将演绎推理推广到多值逻辑,可以将上述推理看做解方程

$$(1-p)\vee q=r \tag{5.27}$$

(1)(MP):已知 $p=T(P)=1$,$r=T(P\to Q)=1$,求 $q=T(Q)$值;

(2)(MT):已知 $q=T(Q)=0$,$r=T(P\to Q)=1$,求 $p=T(P)$值.

5.4.2 无限值逻辑演绎推理

推理句"若 P 则 Q"在逻辑演绎推理中扮演着重要角色.

在二值逻辑中:$P\to Q$,$\neg P\vee Q$,$\neg P\vee(P\wedge Q)$是等价命题.若以 $r(p,q)$表示对应 $P\to Q$ 的布尔函数($r=T(P\to Q)$).则

$$r(p,q)=\neg p\vee q=(1-p)\vee q$$

或
$$r(p,q)=\neg p\vee(p\wedge q)=(1-p)\vee(p\wedge q) \tag{5.28}$$

当 $(p,q)\in\{0,1\}^2$ 时,显然

$$(1-p)\vee q=(1-p)\vee(p\wedge q) \tag{5.29}$$

成立.但是在多值逻辑中式(5.29)并不成立,例如令 $p=0.8$,$q=0.9$,则

$$(1-p)\vee q=0.9,\quad (1-p)\vee(p\wedge q)=0.8$$

因此,$\neg P\vee Q$ 与 $\neg P\vee(P\wedge Q)$在多值逻辑中是不等价的命题公式(因它们的 F-公式不相等).分别以 $\neg P\vee Q$ 与 $\neg P\vee(P\wedge Q)$表示推理句"若 P 则 Q"($P\to Q$),将可以得到两种不同的演绎推理.这两种推理限制在二值逻辑中是相同的.因而都可以作为二值逻辑中演绎推理在多值逻辑中的推广.所以多值逻辑可以有多种演绎推理,这多种推理是不等价的.应用中可以根据实际情况选择其中一种.

下面我们介绍 Lukasiewicz 逻辑.

$$T(P)=p\in[0,1], T(Q)=q\in[0,1]$$

$$T(\neg P)=\neg p=1-p, T(P\vee Q)=p\vee q$$

$$T(P \wedge Q) = p \wedge q, T(P \to Q) = \neg p \dotplus q = (1 - p + q) \wedge 1.$$

($\dotplus$为有界和,$a \dotplus b = (a + b) \wedge 1$).

若限制 $p, q \in \{0,1\}$,则上述结果与二值逻辑一致.

逻辑演绎推理规则如以下定理.

定理 5.4.1 (1)(MP):若已知 $T(P) = p, T(P \to Q) = r$,则

$$T(Q) = q = q(r,p) = \begin{cases} [p,1], & (r = 1) \\ p + r - 1 & (r < 1 \text{ 且 } p + r - 1 \geqslant 0) \\ \varnothing, & \text{其他} \end{cases} \tag{5.30}$$

(2)(MT):若已知 $T(Q) = q, T(P \to Q) = r$,则

$$T(P) = p = p(r,q) = \begin{cases} [0,q], & (r = 1) \\ q - r + 1 & (r < 1 \text{ 且 } q - r + 1 \leqslant 1) \\ \varnothing, & \text{其他} \end{cases} \tag{5.31}$$

($q(r,p) = \varnothing, p(r,q) = \varnothing$表示无解).

证明 $r = T(P \to Q) = \neg p \dotplus q = (1 - p + q) \wedge 1.$

考虑方程 $(1 - p + q) \wedge 1 = r.$

(1)已知 r, p,求 q.

若 $r = 1$,则$(1 - p + q) \wedge 1 = 1 \Rightarrow 1 - p + q \geqslant 1 \Rightarrow q \geqslant p \Rightarrow q \in [p,1]$

若 $r < 1$,则 $r = (1 - p + q) \wedge 1 < 1 \Rightarrow r = 1 - p + q \Rightarrow$

$$\begin{cases} q = r + p - 1 & (r + p - 1 \geqslant 0) \\ \quad \varnothing & (r + p - 1 < 0) \end{cases}.$$

(2)已知 r, q 求 p.

若 $r = 1$,则$(1 - p + q) \wedge 1 = 1 \Rightarrow (1 - p + q) \wedge 1 \geqslant 1 \Rightarrow p \leqslant q \Rightarrow p \in [0,q]$

若 $r < 1$,则 $r = (1 - p + q) \wedge 1 < 1 \Rightarrow r = 1 - p + q \Rightarrow$

$$\begin{cases} p = q - r + 1 & (q - r + 1 \leqslant 1) \\ \quad \varnothing & (q - r + 1 > 1) \end{cases}.$$

在(1)中若 $r = 1, p = 1$,则 $q = 1$,即二值逻辑中的(MP). 在(2)中若 $r = 1, q = 0$,则 $p = 0$,即二值逻辑中的(MT).

5.4.3 语言值逻辑

语言值模糊命题 $\underset{\sim}{A}$ 的真值 $T(\underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{a}$ 为$[0,1]$上的模糊数.

$$\underset{\sim}{a} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda [a_\lambda^-, a_\lambda^+] \quad ([a_\lambda^-, a_\lambda^+] \subseteq [0,1]) \tag{5.32}$$

根据第2章中的相关内容

$$\begin{cases} \underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda [a_\lambda^- \vee b_\lambda^-, a_\lambda^+ \vee b_\lambda^+] \\ \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda [a_\lambda^- \wedge b_\lambda^-, a_\lambda^+ \wedge b_\lambda^+] \\ \neg \underset{\sim}{a} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda [1 - a_\lambda^+, 1 - a_\lambda^-] \end{cases} \tag{5.33}$$

下面介绍几种基本语言真值:

1. 纯真 ct

$$\mu_{ct}(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & x\in[0,1)\end{cases}$$

2. 纯假 cf

$$\mu_{cf}(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\in(0,1]\end{cases}$$

即普通逻辑中的“假”.

3. 真 t $\qquad \mu_t(x)=x$

4. 假 f $\qquad \mu_f(x)=1-x$

5. 很真 t^2 $\qquad \mu_{t^2}(x)=x^2$

6. 很假 f^2 $\qquad \mu_{f^2}(x)=(1-x)^2$

7. 很很真 t^4 $\qquad \mu_{t^4}(x)=x^4$

8. 很很假 f^4 $\qquad \mu_{f^4}(x)=(1-x)^4$

9. 略真 $t^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \mu_{t^{\frac{1}{2}}}(x)=x^{\frac{1}{2}}$

10. 略假 $f^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \mu_{f^{\frac{1}{2}}}(x)=(1-x)^{\frac{1}{2}}$

11. 未知 U_n $\qquad \mu_{U_n}(x)\equiv 1.$

未知表示“不知真假”,因为任何 $x\in[0,1]$ 对 U_n 的隶属度都是 1. 以 1 作命题真值意味着对命题的真假不置可否. 这样的命题称为哑命题.

下面我们介绍偏真型语言值与偏假型语言值.

定义 5.4.1 (1)语言值 $\underset{\sim}{a}$ 称为偏真型当且仅当核心 $\ker\underset{\sim}{a}=\{1\}$;

(2)语言值 $\underset{\sim}{a}$ 称为偏假型当且仅当核心 $\ker\underset{\sim}{a}=\{0\}$.

显然, $\underset{\sim}{a}$ 是偏真型当且仅当 $a_{\lambda}^{+}=1$ 且 $a_{\lambda}^{-}=1$, $\underset{\sim}{a}$ 是偏假型,当且仅当 $\bar{a}_{\lambda}=0$ 且 $a_{1}^{+}=0$.

定义 5.4.2 (1)设 $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ 为偏真型语言值,称 $\underset{\sim}{a}$ 真于 $\underset{\sim}{b}$,当且仅当 $\underset{\sim}{a}\geqslant\underset{\sim}{b}$ (即 $\underset{\sim}{a}\vee\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{a}$);

(2)设 $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ 为偏假型语言值,称 $\underset{\sim}{a}$ 假于 $\underset{\sim}{b}$,当且仅当 $\underset{\sim}{a}\leqslant\underset{\sim}{b}$(即 $\underset{\sim}{a}\vee\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{b}$).

这里 $\underset{\sim}{a}\geqslant\underset{\sim}{b}$ 指的是模糊大小关系,并非模糊集的包含关系.

$$\underset{\sim}{a}\geqslant\underset{\sim}{b}\Leftrightarrow\underset{\sim}{a}\vee\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{a}\Leftrightarrow\forall\lambda, a_{\lambda}^{-}\geqslant b_{\lambda}^{-}, a_{\lambda}^{+}\geqslant b_{\lambda}^{+}.$$

易见, $t,t^2,t^{\frac{1}{2}}$ 皆偏真型且 $t^2\geqslant t\geqslant t^{\frac{1}{2}}$. 即“很真”真于“真”真于“略真”. 同样 $f,f^2,f^{\frac{1}{2}}$ 皆偏假型,且 $f^2\leqslant f\leqslant f^{\frac{1}{2}}$ 即“很假”假于“假”假于“略假”.

$\ker\underset{\sim}{a}=\{1\}$ 是指 $\ker\underset{\sim}{a}=ct$(纯真), $\ker\underset{\sim}{a}=\{0\}$ 是指 $\ker\underset{\sim}{a}=cf$(纯假). 因此偏真型与偏假型语言值的核心就是二值逻辑中的真与假.

5.4.4 语言值逻辑演绎推理

在无限逻辑中,(*MP*)可以将 $q(T(Q))$ 看做 $p(T(P))$ 和 $r(T(P\to Q))$ 的函数 $q=f_1(r,p)$;(*MT*)可以将 p 看做 q 和 r 的函数 $p=f_2(r,p)$. 利用扩展原理由函数 $q=f_1(r,p)$ 与 $p=f_2(r,q)$ 分别诱导出 $[0,1]\times[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的模糊变换 $\underset{\sim}{q}=f_1(\underset{\sim}{r},\underset{\sim}{p})$ 及 $\underset{\sim}{p}=f_2(\underset{\sim}{r},\underset{\sim}{q})$,可以分别作为(*MP*)与(*MT*)的数学模型. 应该指出,作为演绎推理的依据的"若 $\underset{\sim}{P}$ 则 $\underset{\sim}{Q}$",其语言真值 $\underset{\sim}{r}=T(\underset{\sim}{P}\to\underset{\sim}{Q})$ 应该是偏真型语言值. 即 $r_\lambda=[r_\lambda^-,1]$ 且 $r_\lambda^-=1$.

定理 5.4.2 (1)(MP):若已知

$$T(\underset{\sim}{P})=\underset{\sim}{p}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[p_\lambda^-,p_\lambda^+]$$

$$T(\underset{\sim}{P}\to\underset{\sim}{Q})=\underset{\sim}{r}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[r_\lambda^-,1]$$

则

$$T(\underset{\sim}{Q})=\underset{\sim}{q}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[q_\lambda^-,q_\lambda^+]$$

$$[q_\lambda^-,q_\lambda^+]=[(q_\lambda^-+r_\lambda^--1)\vee 0,1] \tag{5.34}$$

(2)(MT):若已知

$$T(\underset{\sim}{Q})=\underset{\sim}{q}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[q_\lambda^-,q_\lambda^+]$$

$$T(\underset{\sim}{P}\to\underset{\sim}{Q})=\underset{\sim}{r}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[r_\lambda^-,1]$$

则

$$T(\underset{\sim}{P})=\underset{\sim}{p}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[p_\lambda^-,p_\lambda^+]$$

$$[p_\lambda^-,p_\lambda^+]=[0,(q_\lambda^+-r_\lambda^-+1)\wedge 1] \tag{5.35}$$

证明 (1)根据定理 5.4.1

$$q=f_1(r,p)\begin{cases}\in[p,1], & (r=1)\\ =p+r-1, & (r<1\text{ 且 }p+r-1\geqslant 0)\\ \in\varnothing, & \text{其他}\end{cases}$$

按扩展原理

$$q_\lambda=\{q\mid\exists(r,p)\in[r_\lambda^-,1]\times[p_\lambda^-,p_\lambda^+],q\in f_1(r,p)\}$$

$$q_\lambda^+=\max\{q\mid q\in q_\lambda\}=1\quad(\text{取 }r=1)$$

$$q_\lambda^-=\min\{q\mid q\in q_\lambda\}=(p_\lambda^-+r_\lambda^--1)\vee 0$$

(当 $p_\lambda^-+r_\lambda^--1\geqslant 0$ 时,取 $r=r_\lambda^-,p=p_\lambda^-$;当 $p_\lambda^-+r_\lambda^--1<0$ 时,取 $p>p_\lambda^-,r>r_\lambda^-$ 且满足 $p+r-1=0$). 于是 $[p_\lambda^-,p_\lambda^+]=[(p_\lambda^-+r_\lambda^--1)\vee 0,1]$.

类似地可以证明(2).

可以看出,(MP)具有下列事实:

(1)若 $\underset{\sim}{p}$ 是偏真型.($p_\lambda^+=1,p_\lambda^-=1$),$\underset{\sim}{r}$ 偏真型($r_\lambda^+=1,r_\lambda^-=1$),则 $q_\lambda^+=1$,且

$q_\lambda^- = p_\lambda^- + r_\lambda^- - 1 = 1$ 因而 $\underset{\sim}{q}$ 是偏真型. 而且当 $\underset{\sim}{p}$ 越真(p_λ^- 越大)且 $\underset{\sim}{r}$ 越真(r_λ^- 越大)时, $\underset{\sim}{q}$ 也越真(q_λ^- 越大).

(2)若 $\underset{\sim}{p} = ct$(纯真), $(p_\lambda^- = p_\lambda^+ = 1)$, 则 $q_\lambda^- = 1 + r_\lambda^- - 1 = r_\lambda^-$ 于是 $\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{r}$; 又若 $\underset{\sim}{r}$ 也是纯真, 则 $\underset{\sim}{q}$ 也是纯真. 此即二值逻辑的(MP).

(3)若 $\underset{\sim}{p}$ 是偏假型, $p_\lambda^- = 0$, 则 $q_\lambda^- = 0$, 于是 $[q_\lambda^-, q_\lambda^+] = [0,1]$ ($\forall\lambda$), 所以 $\underset{\sim}{q} = U_n$(未知), 即 $\underset{\approx}{Q}$ 为哑命题.

同样地(MT)具有下列事实:

(1)若 $\underset{\sim}{q}$ 是偏假型, $\underset{\sim}{r}$ 偏真型, 则 $\underset{\sim}{p}$ 是偏假型; $\underset{\sim}{q}$ 越假, 且 $\underset{\sim}{r}$ 越真, 则 $\underset{\sim}{p}$ 越假.

(2)若 $\underset{\sim}{q} = cf$(纯假), $q_\lambda^+ = 0$, 则 $p_\lambda = [0, 1 - r_\lambda^-]$, 即 $\underset{\sim}{p} = \neg\ \underset{\sim}{r}$; 又若 $\underset{\sim}{r} = ct$(纯真), 则 $\underset{\sim}{p} = cf$(纯假). 此即二值逻辑的(MT).

(3)若 $\underset{\sim}{q}$ 偏真, 则 $\underset{\sim}{p} = U_n$, 即 $\underset{\sim}{p}$ 为哑命题.

上述事实与人们日常生活中的近似推理非常吻合.

习 题 5

1. 设命题 P: 小王在学习, Q: 小王在教室, R: 小王在看电视. 试用 P、Q、R 表示下列命题:

(1)小王或在看电视或在教室;

(2)小王既不在看电视也不在学习;

(3)小王在教室并不学习;

(4)小王在教室学习;

(5)如果小王在学习, 那么他在教室里.

2. 求下列命题的主析取范式与主合取范式

(1) $P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P))$.

(2) $(P \wedge \neg Q \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$.

3. 求下列各模糊命题公式的 F-公式, 并指出哪些为 F-真式, 哪些为 F-假式.

(1) $\neg P \vee (P \vee Q)$;

(2) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$.

4. 设 F-公式 $\neg f$ 的主析取范式是 $\neg f = \bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j_i=1}^{l_i} x_{ij_i}\right)$. 证明 f 的主合取范式是

$$f = \bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j_i=1}^{l_i} \bar{x}_{ij_i}\right).$$

5. 求下列 F-公式的主析取范式与主合取范式

(1) $f=(x\wedge y\wedge z)\vee(\neg x\wedge y\wedge z)\vee(\neg x\wedge y\wedge\neg z)$;

(2) $f=(z\wedge(\neg(\neg y\wedge(y\vee\neg x))\vee(\neg z\wedge y\wedge x\wedge\neg x)))\vee(\neg z\wedge\neg y\wedge((y\wedge x\wedge\neg x)\vee z))$.

6. 在语言值逻辑演绎推理中,设 $T(P\rightarrow Q)=$[很真],求下列语言真值(写出其隶属函数)

(1)已知 $T(P)=$[真],求 $T(Q)$;

(2)已知 $T(P)=$[略真],求 $T(Q)$;

(3)已知 $T(P)=$[很假],求 $T(Q)$;

(4)已知 $T(Q)=$[很很假],求 $T(P)$;

(5)已知 $T(Q)=$[略假],求 $T(P)$;

(6)已知 $T(Q)=$[真],求 $T(P)$.

7. 给出 x,y,z 的条件

$$\begin{cases}x\leqslant 0.5\\ \text{且}\\ y\leqslant 0.5\end{cases}\text{或}\begin{cases}x\geqslant 0.3\\ \text{且}\\ y\leqslant 0.5\\ \text{且}\\ z\geqslant 0.5\end{cases}\text{或}\begin{cases}x\leqslant 0.5\\ y\geqslant 0.3\\ z\leqslant 0.5\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>0.4\\ \text{或}\\ y>0.4\end{cases}\text{且}\begin{cases}x<0.6\\ \text{或}\\ y>0.4\\ \text{或}\\ z<0.6\end{cases}\text{且}\begin{cases}x>0.4\\ \text{或}\\ x<0.6\\ \text{或}\\ z>0.4\end{cases}$$

求使得 $f(x,y,z)\in[0.6,0.8)$ 的组合回路.

第6章 模糊推理

§6.1 模糊语言与模糊算子

6.1.1 模糊语言变量

语言是人们进行思维和信息交流的重要工具. 语言可以分为两种:自然语言和形式语言. 自然语言的特点是语义丰富、灵活,同时具有模糊性,如“小王病得很厉害”、“她很漂亮”、“他的个子很高”等. 通常的计算机语言是形式语言,形式语言有严格的语法规则和语义,不存在任何的模糊性和歧义. 带模糊性的语言称为模糊语言,如长、短、大、小、高、矮、年轻、年老等.

语言变量是自然语言中的词或句,语言变量的取值不是通常的数,而是用模糊语言表示的模糊集合. 例如,若把“年龄”看成是一个模糊语言变量,则该语言变量的取值不是具体年岁,而是诸如“年幼”、“年老”、“年轻”等用模糊语言表示的模糊集合. L. A. Zadeh 为语言变量给出了如下定义:

一个语言变量可以用一个五元体$(x, T(x), U, G, M)$来表示,其中 x 表示变量名称;$T(x)$为 x 的语言集,即语言 x 取值名称的集合,而且每一个语言取值对应一个在 U 上的模糊集;U 是论域;G 为语言取值的语法规则;M 是语义规则,用于产生模糊集合的隶属函数.

例如,若定义“速度”为语言变量,则 T(速度)可能为

$$T(\text{速度}) = \{\text{慢},\text{适中},\text{快},\text{很慢},\text{稍快},\cdots\}$$

上述每个模糊语言如慢、适中等是定义在论域 U 上的模糊集合. 设论域 $U = [0,160]$,则可以认为大致低于 60 km/h 为“慢”,80 km/h 左右为“适中”,大于 100 km/h以上为“快”,等等.

6.1.2 语气算子

自然语言中有些词,如“很”、“微”、“极”、“比较”、“特别”,等等,把这些词缀在一个原子单词前面(如“很老”、“比较老”、“极老”,等等)便可以调整该词义的肯定程度,因而得到一个新词,所以可以将这些词看做一种算子或变换,称为语气算子. 其集合表示为

语气算子 $H_\lambda: F(U)\to F(U)$（λ 是正实数）.

$$A\to H_\lambda(A),H_\lambda(A)(u)=(A(u))^\lambda \tag{6.1}$$

当 $\lambda>1$ 时,H_λ 称为集中化算子（如“很”$=H_2$,“极”$=H_4$）;当 $\lambda<1$ 时,H_λ 称为松散化算子（如“略”$=H_{0.5}$,“微”$=H_{0.25}$）.

例 6.1.1　设年龄论域 $U=[0,100]$,给出词集合为 $T=\{$青年,中年,老年$\}$,T 中单词的定义如下:

$$[\text{青年}](u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<u\leqslant 100\end{cases}$$

$$[\text{中年}](u)=\begin{cases}0, & 0\leqslant u\leqslant 35\\ \left[1+\left(\dfrac{u-45}{5}\right)^4\right]^{-1}, & 35<u\leqslant 45\\ \left[1+\left(\dfrac{u-45}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 45<u\leqslant 100\end{cases}$$

$$[\text{老年}](u)=\begin{cases}0, & 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<u\leqslant 100\end{cases}$$

所以有

$$H_2[\text{老年}](u)=\begin{cases}0, & 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-2}, & 50<u\leqslant 100\end{cases}$$

$$H_4[\text{老年}](u)=\begin{cases}0, & 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-4}, & 50<u\leqslant 100\end{cases}$$

$$H_{0.5}[\text{老年}](u)=\begin{cases}0, & 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-0.5}, & 50<u\leqslant 100\end{cases}$$

$$H_{0.25}[\text{老年}](u)=\begin{cases}0, & 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-0.25}, & 50<u\leqslant 100\end{cases}$$

6.1.3　模糊化算子

如“大约”、“好像”、“近似于”一类词,将其缀在一个词的前面,可以把确切的

词的意义模糊化,称为模糊化算子.模糊化算子的作用相当于模糊变换

$$T:F(U)\to F(U)$$

$$T:F(U)\to F(U),\quad T(A)(u)=(E\circ A)(u)=\bigvee_{v\in U}(A(v)\wedge E(u,v)).$$

其中,$E\in F(U\times U)$是 U 上的一个相似关系.当 $U\in(-\infty,+\infty)$时,常取

$$E(u,v)=\begin{cases}e^{-(u-v)^2}, & \text{当}|u-v|<\delta\\ 0, & \text{当}|u-v|\geqslant\delta\end{cases}$$

其中,δ 是参数.

例 6.1.2 设 $A(u)=\begin{cases}1, \text{当 } u=3\\ 0, \text{当 } u\neq 3\end{cases}$,则

$$T(A)(u)=\bigvee_{v\in U}(A(v)\wedge E(u,v))=E(u,3)=\begin{cases}e^{-(u-3)^2}, & \text{当}|u-3|<\delta\\ 0, & \text{当}|u-3|\geqslant\delta\end{cases}$$

当 A 对应的词是 3 时,$T(A)$对应的词称为"大约 3".

6.1.4 判定化算子

如"偏向"、"倾向于"、"多半是"等词,也算是一种算子,变模糊为肯定,在模糊之中给出粗糙的判断,称为判定化算子.其一般表示形式是

$$P_a(A)(u)=d_a[A(u)]$$

其中,$0<a\leqslant\frac{1}{2}$,d_a 是定义在$[0,1]$上的实函数

$$d_a(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ \frac{1}{2}, & a<x\leqslant 1-a\\ 1, & x>1-a.\end{cases}$$

当隶属度 $A(u)\leqslant a$ 和 $A(u)>1-a$ 时,判定是肯定的;当 $a<A(u)\leqslant 1-a$ 时,模糊度为$\frac{1}{2}$,即更加模糊.a 是根据实际问题的需要来确定的.

若取 $a=0.5$,则

$$d_{0.5}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant\frac{1}{2}\\ 1, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

一般判断 $P_{0.5}$只能是倾向性的,不能那样肯定,故 $P_{0.5}$称为"倾向".例如

$$[\text{倾向年轻}](u)=P_{0.5}[\text{年轻}](u)=d_{0.5}([\text{年轻}](u)).$$

因为[年轻](30)=0.5,所以

$$[\text{年轻}](u)=\begin{cases}1, & u<30\\ 0, & u\geqslant 30.\end{cases}$$

6.1.5 语言值

在自然语言中,有一类词的词义是表示数量的,如"大"、"小"、"多"、"轻"、"重"、"长"、"短"等词以及由这类词按上述方式扩大的词汇,如"很大"、"不大"、"非常小"、"不长也不短"、"偏大"等都称为语言值.这类词都是口语化的数量.

例如 设 $U=\{1,2,\cdots,10\}$,在论域 U 上定义:

$$[大]=\frac{0.2}{4}+\frac{0.4}{5}+\frac{0.6}{6}+\frac{0.8}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$[小]=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.2}{5}$$

$$[很大]=H_2[很大]=\frac{0.04}{4}+\frac{0.16}{5}+\frac{0.36}{6}+\frac{0.64}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$[偏大]=P_{0.5}[大]=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}.$$

§6.2 模糊判断句、推理句及模糊逻辑推理

6.2.1 模糊判断句及其逻辑运算

称形如"x 是 a"的陈述句为判断句,记为(a).这里 a 是表示概念的一个词(单词或字组),x 称为语言变量,x 可以代表论域 X 中的任何一个特定对象.称

$$A=\{x\in X|(a)对于\ x\ 为真\}$$

为判断句(a)的真域.若 $A=X$,则称判断句(a)永真;若 $A=\varnothing$,称(a)永假.

定义 6.2.1 在判断句(a)中,若 a 所表示的概念是清晰的,则称(a)是一个普通判断句.若 a 所表示的概念是模糊的,则称(a)是一个模糊判断句.

例 6.2.1 若 a 表示"大学生",则"是大学生"为一判断句.如果 $x=$张三,则"张三是大学生"是一个可判断真假的一般命题.若 a 表示"老年人",则"是老年人"为一模糊判断句.如果 $x=$张三,则"张三是老年人"就是一个模糊命题.因为"老年人"是个模糊概念,故不能用真、假来判定这个命题的真假,根据张三的具体情况,可以取其真值为$[0,1]$中的数,记为 $T(a(张三))$,称为模糊判断句(a)的真域.

定义 6.2.2 若(a)为一模糊判断句,则任取 $x\in X$,"x 是 a"即为一模糊命题,记为$(a)(x)$,记其真值为 $T((a)(x))$.定义 $A\in F(X)$,其隶属函数为

$$A(x)=T((a)(x)),x\in X$$

称 A 为(a)的真域.若 $\forall x\in X,T((a)(x))\geqslant\lambda(0<\lambda\leqslant 1)$,则称$(a)$为 $\lambda-$真,此时 $A_\lambda=X$.

模糊判断句同模糊命题一样,可以通过逻辑运算组成新的判断句.

例 6.2.2 设(a):"x 是 a",设(b):"x 是 b",则

$(a)\vee(b)$:"x 是 a"或"x 是 b"

$(a)\wedge(b)$:"x 是 a"且"x 是 b"

$\neg(a)$:"x 不是 a"

若(a),(b)均为清晰的判断句,它们的真域分别为 A,B,则

$$(a)\vee(b)\text{的真域}=\{x\in X\mid \text{“}x\text{ 是 }a\text{”是真或“}x\text{ 是 }b\text{”是真}\}$$
$$=\{x\in X\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}=A\cup B.$$

类似地,$(a)\wedge(b)$的真域为 $A\cap B$,$\neg(a)$的真域为 A^c.

若(a),(b)均为模糊判断句,它们的真域分别为 $A,B\in F(X)$,则$(a)\vee(b)$的真域为 $A\cup B$. 事实上,$\forall x\in X$,由定义容易验证

$$T(((a)\vee(b))(x))=T((a)(x)\vee(b)(x))=T((a)(x))\vee T((b)(x))$$
$$=A(x)\vee B(x)=(A\cup B)(x).$$

因此$(a)\vee(b)$的真域为 $A\cup B$. 类似地,$(a)\wedge(b)$的真域为 $A\cap B$,$\neg(a)$的真域为 A^c.

6.2.2 模糊推理句

定义 6.2.3 称形如"若 x 是 a,则 x 是 b"的陈述句为推理句,记做$(a)\to(b)$. 若 a,b 所表示的概念都是确切的,则称$(a)\to(b)$为普通推理句. 若 a,b 所表示的概念都是模糊的,则称$(a)\to(b)$为模糊推理句.

如果赋予变元 x 一个特定对象 x_0,那么"若 x_0 是 a,则 x_0 是 b"就是一个模糊命题,记为$((a)\to(b))(x_0)$. 设$(a)\to(b)$对 x 的真值 $T(((a)\to(b))(x))\in[0,1]$,定义模糊集 $R\in F(X)$如下

$$R(x)=T(((a)\to(b))(x)),\quad x\in X$$

则称 R 为$(a)\to(b)$的真域. 特别地,若$(a)\to(b)$是普通推理句,则 $T(((a)\to(b))(x))\in\{0,1\}$,$R=\{x\mid (a)\to(b)\text{ 对 }x\text{ 为真}\}\subseteq X$.

设(a),(b)为普通判断句,其真域分别为 A,B,则

$$R=(A\cap B)\cup A^c=A^c\cup B$$

若$(a)\to(b)$永真,即 $R=X$,则称该推理句为定理. 对于定理有如下规则:

(1) $(a)\to(b)$是定理$\Leftrightarrow A\subseteq B$;

(2) $(a)\to(b)$是定理,且(a)对 x 真$\Rightarrow(b)$对 x 真,即

$$A\subseteq B,x\in A\Rightarrow x\in B;$$

(3) $(a)\to(b)$是定理,且(b)对 x 假$\Rightarrow(a)$对 x 假,即

$$A\subseteq B,x\notin B\Rightarrow x\notin A;$$

(4) $(a)\to(b)$是定理,且$(b)\to(c)$是定理$\Rightarrow(a)\to(c)$是定理,即

$$A\subseteq B,B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C.$$

由于在模糊情形下,$A^c\cup B$ 与$(A\cap B)\cup A^c$ 不一定相等,所以将上述讨论推广

到模糊推理句情形时需引入以下定义.

定义 6.2.4 设$(a)\to(b)$是模糊推理句,其真域分别为$A,B\in F(X)$,分别记

$$T_1(((a)\to(b))(x))=(1-A(x))\vee B(x)$$

$$T_2(((a)\to(b))(x))=(1-A(x))\vee(A(x)\wedge B(x))$$

其对应真域分别为$R_1=A^c\cup B$,$R_2=A^c\cup(A\cap B)$,称R_1,R_2为第一种真域和第二种真域. 又若$T=T_1$或T_2,且$T(((a)\to(b))(x))>\frac{1}{2}$,则称$(a)\to(b)$对$x$为模糊真;若$T(((a)\to(b))(x))<\frac{1}{2}$,则称$(a)\to(b)$对$x$为模糊假. 若$\forall x\in X$,$(a)\to(b)$对$x$为模糊真,则称$(a)\to(b)$为恒真,此时也称$(a)\to(b)$为模糊定理;若$\forall x\in X$,$(a)\to(b)$对$x$为模糊假,则称$(a)\to(b)$为恒假.

以模糊推理句$(a)\to(b)$(即模糊定理)作为依据,可以进行如下的模糊推理.

定理 6.2.1 下列诸结论成立:

(1)肯定前件(条件)的假言推理(MP):如果$(a)\to(b)$是模糊定理,且(a)对x为模糊真,则(b)对x为模糊真,且$T((b)(x))\geqslant T(((a)\to(b))(x))$.

(2)否定后件(结论)的假言推理(MT):如果$(a)\to(b)$是模糊定理,且(b)对x为模糊假,则(a)对x为模糊假,且$T((a)(x))=1-T(((a)\to(b))(x))$.

(3)复合规则:如果$(a)\to(b)$与$(b)\to(c)$都是模糊定理,则$(a)\to(c)$是模糊定理,且$T(((a)\to(c))(x))\geqslant T(((a)\to(b))(x))\wedge T(((b)\to(c))(x))$.

证明 下面用模糊推理句的第一种真域来证明. 第二种真域的证明类似. 设A,B,C分别为模糊判断句$(a),(b),(c)$的真域,$(a)\to(b)$的真域采用$A^c\cup B$.

(1)由$(a)\to(b)$是模糊定理,$\forall x\in X$,有

$$T(((a)\to(b))(x))=(1-A(x))\vee B(x)>\frac{1}{2} \tag{6.2}$$

又由(a)对x为模糊真,有$T((a)(x))=A(x)>\frac{1}{2}$,即有$1-A(x)<\frac{1}{2}$,从而由式(6.2)得

$$B(x)=T((b)(x))>\frac{1}{2}$$

这样(b)对x为模糊真,且

$$T((b)(x))=B(x)=T(((a)\to(b))(x)).$$

(2)若(b)对x为模糊假,即$T((b)(x))=B(x)<\frac{1}{2}$,结合式(6.2)得

$$T(((a)\to(b))(x))=1-A(x)=1-T((a)(x))>\frac{1}{2}$$

即$T((a)(x))<\frac{1}{2}$,从而(a)对x为模糊假,且

$$T((a)(x)) = 1 - T(((a)\to(b))(x)).$$

(3)如果$(a)\to(b)$与$(b)\to(c)$都是模糊定理,则$\forall x\in X$,式(6.2)成立且

$$T(((b)\to(c))(x)) = (1-B(x))\vee C(x) > \frac{1}{2} \tag{6.3}$$

若$1-A(x)\geqslant B(x)$,则由式(6.2)得$1-A(x)=T(((a)\to(b))(x))$,从而

$$T(((a)\to(c))(x)) = (1-A(x))\vee C(x)\geqslant 1-A(x) = T(((a)\to(b))(x)) > \frac{1}{2}$$

若$1-A(x)\leqslant B(x)$,则由式(6.2)得$B(x)>\frac{1}{2}$,即$1-B(x)<\frac{1}{2}$,再由式(6.3)得

$$T(((b)\to(c))(x)) = C(x) > \frac{1}{2}$$

所以 $$T(((a)\to(c))(x)) = (1-A(x))\vee C(x)\geqslant C(x) > \frac{1}{2}$$

因此结论成立.

§6.3 不同变元的模糊推理句

句型为"若x是a,则y是b"的推理句,涉及两个不同的变元x与y,它们可以分别属于两个不同的论域X与Y,从而是一个二元谓词,记做$(a(x))\to(b(y))$,其真域是$X\times Y$的子集或模糊子集.为了研究这类模糊推理句的真域,我们首先分析这类普通推理句的真域.

在$(a(x))\to(b(y))$中,若a,b所表示的概念都是确切的,则称为普通推理句,其真域$R\in P(X\times Y)$为

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y)\mid(a(x))\to(b(y))\text{对}(x,y)\text{真}\}\\ &= \{(x,y)\mid(a)\text{对}x\text{真且}(b)\text{对}y\text{真}\}\cup\{(x,y)\mid(a)\text{对}x\text{假}\}\\ &= \{(x,y)\mid x\in A\text{ 且 }y\in B\}\cup\{(x,y)\mid x\in A^c\}\\ &= (A\times B)\cup(A^c\times Y)\end{aligned}$$

其中A,B分别为(a),(b)的真域.如图6.1所示的斜线部分是R的真域,即

$$R = (A^c\times Y)\cup(A\times B) = (A^c\times Y)\cup(X\times B)$$

下面以普通推理句$(a(x))\to(b(y))$为依据给出如下逻辑推理规则:

(1)(MP):如果$(a(x))\to(b(y))$对(x,y)真且(a)对x真,则(b)对y真.

(2)(MT):如果$(a(x))\to(b(y))$对(x,y)真且(b)对y假,则(a)对x假.

(3)复合规则:如果$(a(x))\to(b(y))$对(x,y)真且$(b(y))\to(c(z))$对(y,z)真,则$(a(x))\to(c(z))$对(x,z)真.

将上述讨论推广到模糊推理句,首先给出如下定义.

定义6.3.1 在$(a(x))\to(b(y))$中,若a,b所表示的概念都是模糊的,则称

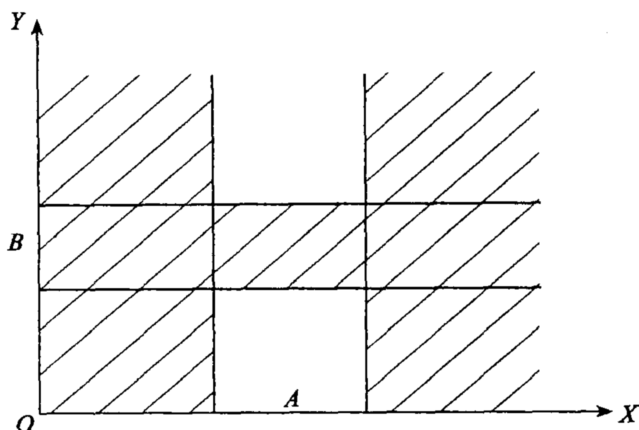


图6.1

为模糊推理句，其真域 $R\in F(X\times Y)$ 为

$$R=(A\times B)\cup(A^c\times Y)$$

其中，A,B 分别为 (a)，(b) 的真域，并且

$$T((a(x))\to(b(y))(x,y))=R(x,y)=(A(x)\wedge B(y))\vee(1-A(x))$$

以 $(a(x))\to(b(y))$ 为依据的模糊逻辑推理规则由下面定理给出.

定理6.3.1 (1) (MP)：如果 $(a(x))\to(b(y))$ 对 (x,y) 模糊真且 (a) 对 x 模糊真，则 (b) 对 y 模糊真，而且 $T((b)(y))\geqslant T((a(x))\to(b(y))(x,y))$.

(2)(MT)：如果 $(a(x))\to(b(y))$ 对 (x,y) 模糊真且 (b) 对 y 模糊假，则 (a) 对 x 模糊假，而且 $T((a)(x))=1-T((a(x))\to(b(y))(x,y))$.

(3)复合规则：如果 $(a(x))\to(b(y))$ 对 (x,y) 模糊真且 $(b(y))\to(c(z))$ 对 (y,z) 模糊真，则 $(a(x))\to(c(z))$ 对 (x,z) 模糊真，而且

$$T((a(x))\to(c(z))(x,z))\geqslant T((a(x))\to(b(y))(x,y))\wedge T((b(y))\to(c(z))(y,z))$$

例6.3.1 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}=\{1.5,1.6,1.7,1.8,1.9,2.0\}$ 表示某地区男子身高论域，单位为米；$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_7\}=\{40,50,60,70,80,90,100\}$ 表示某地区男子体重论域，单位为公斤.

又对该地区男子来说，“高”的概念表示为

$$[高]=\frac{0.2}{1.5}+\frac{0.4}{1.6}+\frac{0.7}{1.7}+\frac{0.9}{1.8}+\frac{1}{1.9}+\frac{1}{2.0}$$

“重”的概念表示为

$$[重]=\frac{0.2}{40}+\frac{0.3}{50}+\frac{0.6}{60}+\frac{0.8}{70}+\frac{0.9}{80}+\frac{1}{90}+\frac{1}{100}$$

下面求出模糊推理句“若 x 很高，则 y 很重”的真域 R. 设“x 很高”与“y 很重”

的真域分别为 A 和 B,则通过语气算子可得

$$A=[\text{很高}]=H_2[\text{高}]=\frac{0.04}{1.5}+\frac{0.16}{1.6}+\frac{0.49}{1.7}+\frac{0.81}{1.8}+\frac{1}{1.9}+\frac{1}{2.0}$$

表示为模糊向量 $\boldsymbol{A}=(0.04,0.16,0.49,0.81,1,1)$.

$$B=[\text{很重}]=H_2[\text{重}]=\frac{0.04}{40}+\frac{0.09}{50}+\frac{0.36}{60}+\frac{0.64}{70}+\frac{0.81}{80}+\frac{1}{90}+\frac{1}{100}$$

表示为模糊向量 $\boldsymbol{B}=(0.04,0.09,0.36,0.64,0.81,1,1)$.

采用 $R=(A\times B)\cup(A^c\times Y)\triangleq R_1\cup R_2$,则

$$R_1=A\times B=\begin{pmatrix}0.04\\0.16\\0.49\\0.81\\1\\1\end{pmatrix}\wedge(0.04,0.09,0.36,0.64,0.81,1,1)$$

$$=\begin{bmatrix}0.04&0.04&0.04&0.04&0.04&0.04&0.04\\0.04&0.09&0.16&0.16&0.16&0.16&0.16\\0.04&0.09&0.36&0.49&0.49&0.49&0.49\\0.04&0.09&0.36&0.64&0.81&0.81&0.81\\0.04&0.09&0.36&0.64&0.81&1&1\\0.04&0.09&0.36&0.64&0.81&1&1\end{bmatrix}$$

$$R_2=A^c\times Y=\begin{pmatrix}0.96\\0.84\\0.51\\0.19\\0\\0\\0\end{pmatrix}\wedge(1,1,1,1,1,1,1)$$

$$=\begin{bmatrix}0.96&0.96&0.96&0.96&0.96&0.96&0.96\\0.84&0.84&0.84&0.84&0.84&0.84&0.84\\0.51&0.51&0.51&0.51&0.51&0.51&0.51\\0.19&0.19&0.19&0.19&0.19&0.19&0.19\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

于是 $R=(A\times B)\cup(A^c\times Y)$ 可以表示为 6×7 矩阵

$$
\boldsymbol{R}=R_1\cup R_2=\begin{bmatrix}0.96&0.96&0.96&0.96&0.96&0.96&0.96\\0.84&0.84&0.84&0.84&0.84&0.84&0.84\\0.51&0.51&0.51&0.51&0.51&0.51&0.51\\0.19&0.19&0.36&0.64&0.81&0.81&0.81\\0.04&0.09&0.36&0.64&0.81&1&1\\0.04&0.09&0.36&0.64&0.81&1&1\end{bmatrix}
$$

所以 $\boldsymbol{R}$ 就是模糊推理句"若 x 很高,则 y 很重"的真域.

§6.4 似 然 推 理

人们日常思考问题时,常有这样的近似推理方法,以"若 x 小,则 y 大"为依据,如果 x 很小,就判断 y 很大,如果 x 略小就判断 y 略大.这种推理过程可以看做一种模糊变换,将"x 很小"与"x 略小"的真域 A_1 与 A_2 变化到"y 很大"与"y 略大"的真域 B_1 与 B_2.这种推理方法称为似然推理.

若 $R\in F(X\times Y)$ 为"若 x 是 a,则 y 是 b"的真域.由 R 可以诱导一个从 X 到 Y 的模糊变换 T_R 及一个从 Y 到 X 的模糊变换 T_R^{-1}:

$$T_R: F(X)\to F(Y), A_1\mapsto B_1=A_1\circ R$$

$$T_R^{-1}: F(Y)\to F(X), B_1\mapsto A_1=B_1\circ R^{\mathrm{T}}$$

其中 $R^{\mathrm{T}}\in F(Y\times X)$ 为 R 的转置.

似然推理的规则是:

(1)"若 x 是 a,则 y 是 b","x 是 a'"⇒"y 是 b'",(b')的真域 $B'=A'\circ R$,其中,(a')的真域为 A',$R\in F(X\times Y)$ 为"若 x 是 a,则 y 是 b"的真域.

(2)"若 x 是 a,则 y 是 b","y 是 b'"⇒"x 是 a'",(a')的真域 $A'=B'\circ R^{\mathrm{T}}$,其中,($b'$)的真域为 B',$R\in F(X\times Y)$ 为"若 x 是 a,则 y 是 b"的真域.

这两种似然推理相当于演译推理中的(MP)与(MT).似然推理好比变换器,给出某个"输入",得到一定的"输出".

在二值逻辑中,普通推理句($a(x)$)→($b(y)$)的真域为

$$R=(A^c\times Y)\cup(A\times B) \tag{6.4}$$

其中 $$R(x,y)=(1-A(x))\vee(A(x)\wedge B(y)).$$

将其推广到模糊情形,$R(x,y)$ 可以有多种不同的形式,由此可以得到若干不同的似然推理模型.列举如下:

模型 1:$R_1=(A^c\times Y)\cup(A\times B)$,其中

$$R_1(x,y)=(1-A(x))\vee(A(x)\wedge B(y)).$$

模型 2:$R_2=(A^c\times Y)\cup(X\times B)$,其中 $R_2(x,y)=(1-A(x))\vee B(y)$.

模型 3:$R_3=\begin{cases}1, & A(x)\leqslant B(y)\\0, & A(x)>B(y)\end{cases}$.

模型 4：$R_4=\begin{cases}1, & A(x)\leqslant B(y)\\ B(y), & A(x)>B(y)\end{cases}.$

模型 5：$R_5=\begin{cases}\dfrac{B(y)}{A(x)}\wedge 1, & A(x)>0\\ 1, & A(x)=0\end{cases}.$

模型 6：$R_6=\begin{cases}1, & A(x)\leqslant B(y)\\ B(y)\wedge(1-A(x)), & A(x)>B(y)\end{cases}.$

当限制 $A(x),B(y)\in\{0,1\}$，则上述模型都与式(6.4)一致，即

$$R_i(x,y)=\begin{cases}1, & 当\ A(x)=B(y)=1\ 或\ A(x)=0\\ 0, & 当\ A(x)=1\ 且\ B(y)=0\end{cases}$$

其中，$k=1,2,\cdots,6$. 因此它们都可以看做二值逻辑(公式(6.4))的推广.

例 6.4.1 设 $X=Y=\{1,2,3,4,5\}$，定义

$$[小]=\frac{1}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.1}{3}=(1,0.5,0.1,0,0)$$

$$[大]=\frac{0.1}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}=(0,0,0.1,0.5,1)$$

如果"若 x 是 a，则 y 是 b"的真域 $\boldsymbol{R}$ 使用模型 1，则

$$\boldsymbol{R}(x,y)=(1-[小](x))\vee([小](x)\wedge[大](y))$$

算出 R 如下

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0.1 & 0.5 & 1\\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

下面我们利用模型 1 进行似然推理.

(1)已知"x 略小"，试问 y 如何？

$$[略小]=H_{0.5}[小]=\frac{1}{1}+\frac{0.7}{2}+\frac{0.3}{3}=(1,0.7,0.3,0,0)$$

$$[略小]\circ R=\frac{0.5}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}\approx[大]$$

根据模型 1 判断"y 近似大"，未加语气，大体符合人们的思想实际. 其中[略小]$\circ R$ 表示[略小]和 R 的合成.

(2)已知"y 不很大"，试问 x 如何？

$$[很大]=H_2[大]=\frac{0.01}{3}+\frac{0.25}{4}+\frac{1}{5}=(0,0,0.01,0.25,1)$$

$$[不很大]=[很大]^c=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.99}{3}+\frac{0.75}{4}=(1,1,0.99,0.25,0)$$

$$[\text{不很大}]\circ R^T=\frac{0.5}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.9}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\approx[\text{不小}]$$

根据模型1判断“x 近似不小”，未加语气，大体符合人们的思想实际.

§6.5　模糊条件语句与模糊多段条件语句

6.5.1　模糊条件语句

句型“若 x 是 a，则 y 是 b，否则 y 是 c”的陈述句，称为条件语句，记做 $((a)\to(b),\neg(a)\to(c))$. 若 a,b,c 为普通概念，称 $((a)\to(b),\neg(a)\to(c))$ 为普通条件语句；若 a,b,c 为模糊概念，称 $((a)\to(b),\neg(a)\to(c))$ 为模糊条件语句.

为了求出模糊条件语句对应的真域，先考虑普通条件语句的真域. 设 A,B,C 分别为 $(a),(b),(c)$ 的真域，则条件语句 $((a)\to(b),\neg(a)\to(c))$ 的真域为

$$\begin{aligned}R&=\{(x,y)\mid((a)\to(b))(\neg(a)\to(c))(x,y)\}\\&=\{(x,y)\mid((a)\to(b))(x,y)\}\cap\{(x,y)\mid(\neg(a)\to(c))(x,y)\}\\&=((A^c\times Y)\cup(A\times B))\cap((A\times Y)\cup(A^c\times C))\\&=((A^c\cap A)\times Y)\cup(A^c\times(Y\cap C))\cup(A\times(B\cap Y))\cup((A\times A^c)\cap(B\times C))\\&=(A\times B)\cup(A^c\times C)\end{aligned}$$

下面来求模糊条件语句对应的真域. 设 $A\in F(X)$，$B,C\in F(Y)$ 分别为模糊判断句 $(a),(b),(c)$ 的真域，则模糊条件语句 $((a)\to(b),\neg(a)\to(c))$ 的真域 $R=R_1\cap R_2$，其中，R_1,R_2 分别为 $((a)\to(b)$ 与 $\neg(a)\to(c))$ 的真域. 下面介绍模糊条件语句真域的三种模型.

模型1：
$$\begin{aligned}R^{(1)}&=((A^c\times Y)\cup(A\times B))\cap((A\times Y)\cup(A^c\times C))\\&=((A^c\cap A)\times Y)\cup(A^c\times C)\cup(A\times B)\cup((A\cap A^c)\times(B\cap C))\\&=((A^c\cap A)\times Y)\cup(A\times B)\cup(A^c\times C)\end{aligned}$$

$$R^{(1)}(x,y)=(A(x)\wedge(1-A(x)))\vee(A(x)\wedge B(y))\vee((1-A(x))\wedge C(y))$$

模型2：$R^{(2)}=(A\times B)\cup(A^c\times C)$

$$R^{(2)}(x,y)=(A(x)\wedge B(y))\vee((1-A(x))\wedge C(y))$$

模型3：求解真域 R 的模糊关系方程

$$\begin{cases}A\circ R=B\\A^c\circ R=C\end{cases}$$

若设

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$$

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},A^c=\{1-a_1,1-a_2,\cdots,1-a_n\}$$

$$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\},C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$$

则 $\boldsymbol{R}$ 可以表示成一个模糊矩阵 $\boldsymbol{R} \in [0,1]^{n \times m}$,满足方程

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1-a_1 & 1-a_2 & \cdots & 1-a_n \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_m \end{bmatrix}$$

取该方程的最大解 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 作为$((a) \to (b), \neg (a) \to (c))$的真域模型 $\boldsymbol{R}^{(3)}$.

例 6.5.1 设 $X = Y = \{1,2,3,4,5\}$,定义

$$A = [\text{轻}] = \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.1}{4}$$

$$B = [\text{重}] = \frac{0.1}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5}$$

考虑模糊条件语句"若 x 轻,则 y 重,否则 y 不很重". 我们按上述三种模型求其真域.

$$[\text{很重}] = H_2[\text{重}] = \frac{0.01}{2} + \frac{0.09}{3} + \frac{0.64}{4} + \frac{1}{5}$$
$$= (0, 0.01, 0.09, 0.64, 1)$$

$$\boldsymbol{A}^c = \frac{0.2}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{0.9}{4} + \frac{1}{5}$$
$$= (0, 0.2, 0.7, 0.9, 1)$$

$$\boldsymbol{C} = [\text{不很重}] = [\text{很重}]^c = \frac{1}{1} + \frac{0.99}{2} + \frac{0.91}{3} + \frac{0.36}{4} = (1, 0.99, 0.91, 0.36, 0)$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^c \times \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.36 & 0 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.36 & 0 \\ 1 & 0.99 & 0.91 & 0.36 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A}^c) \times \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^{(1)}=((A^c\cap A)\times Y)\cup(A\times B)\cup(A^c\times C)=\begin{bmatrix}0&0.1&0.3&0.8&1\\0.2&0.2&0.3&0.8&0.8\\0.7&0.7&0.7&0.36&0.3\\0.9&0.9&0.9&0.36&0.1\\1&0.99&0.91&0.36&0\end{bmatrix}$$

$$R^{(2)}=(A\times B)\cup(A^c\times C)=\begin{bmatrix}0&0.1&0.3&0.8&1\\0.2&0.2&0.3&0.8&0.8\\0.7&0.7&0.7&0.36&0.3\\0.9&0.9&0.9&0.36&0.1\\1&0.99&0.91&0.36&0\end{bmatrix}=R^{(1)}$$

模型$R^{(3)}$满足模糊关系方程

$$\begin{bmatrix}1&0.8&0.3&0.1&0\\0&0.2&0.7&0.9&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}&\cdots&r_{15}\\r_{21}&r_{22}&\cdots&r_{25}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\r_{51}&r_{52}&\cdots&r_{55}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0.1&0.3&0.8&1\\1&0.99&0.91&0.36&0\end{bmatrix}$$

取其最大解

$$R^{(3)}=\begin{bmatrix}0&0.1&0.3&0.8&1\\0&0.1&0.3&1&0\\0&0.1&1&0.36&0\\0&1&1&0.36&0\\1&0.99&0.91&0.36&0\end{bmatrix}$$

(1) 如果“x 略轻”，$A'=[略轻]=H_{0.5}[轻]=\frac{1}{1}+\frac{0.9}{2}+\frac{0.55}{3}+\frac{0.3}{4}$，则根据推理规则，有

$$A'\circ R^{(1)}=\frac{0.55}{1}+\frac{0.55}{2}+\frac{0.55}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{1}{5}\approx[重]$$

$$A'\circ R^{(3)}=\frac{0.3}{2}+\frac{0.55}{3}+\frac{0.9}{4}+\frac{1}{5}=[略重]$$

模型1和模型2判断“y 近似重”；模型3判断“y 略重”，这与人们的实际想法是很符合的.

(2) 如果“x 重”，$A'=[重]=\frac{0.1}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{1}{5}$，则根据推理规则，有

$$A'\circ R^{(1)}=\frac{1}{1}+\frac{0.99}{2}+\frac{0.91}{3}+\frac{0.36}{4}=[不很重]$$

$$A'\circ R^{(3)}=\frac{1}{1}+\frac{0.99}{2}+\frac{0.91}{3}+\frac{0.36}{4}=[不很重]$$

注意到“x 重”与“x 轻”对立，按正常思维应判断“y 不很重”这三种模型都与人们的实际想法符合.

(3) 如果“y不重”，$B'=[\text{不重}]=[\text{重}]^c=\frac{1}{1}+\frac{0.9}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.2}{4}$，则根据推理规则，有

$$B'\circ R^{(1)\mathrm{T}}=\frac{0.3}{1}+\frac{0.3}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.9}{4}+\frac{1}{5}\approx[\text{不轻}]=[\text{轻}]^c=\frac{0.2}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.9}{4}+\frac{1}{5}$$

$$B'\circ R^{(3)\mathrm{T}}=\frac{0.2}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.9}{4}+\frac{1}{5}=[\text{不轻}]$$

模型1和模型2判断“x近似不轻”；模型3判断“不轻”，这与人们的实际想法是很符合的.

(4) 如果“y轻，问x如何$a_i,b_i(i=1,2,\cdots,l)$”，$B'=[\text{轻}]=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.1}{4}$，则根据推理规则，有

$$B'\circ R^{(1)\mathrm{T}}=\frac{0.3}{1}+\frac{0.3}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.9}{4}+\frac{1}{5}\approx[\text{不轻}]$$

$$B'\circ R^{(3)\mathrm{T}}=\frac{0.3}{1}+\frac{0.3}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{1}{5}\approx[\text{重}].$$

6.5.2 模糊多段条件语句

设$a_i,b_i(i=1,2,\cdots,l)$为模糊概念，则称句型为“若x是a_1，则y是b_1；否则若x是a_2，则y是b_2；否则…；否则若x是a_l，则y是b_l”或者“若x是a_1，则y是b_1；若x是a_2，则y是b_2；…；若x是a_l，则y是b_l”的语句称为模糊多段条件语句，记做

$$((a_1)\to(b_1),(a_2)\to(b_2),\cdots,(a_l)\to(b_l))$$

设(a_i)，(b_i)的真域分别为$A_i,B_i,i=1,2,\cdots,l$，下面考虑模糊多段条件语句的真域.

模型1：
$$R^{(1)}=(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)\cup\cdots\cup(A_l\times B_l)$$
$$R^{(1)}(x,y)=\bigvee_{i=1}^{l}(A_i(x)\wedge B_i(y))$$

模型2：
$$R^{(2)}=\bigcap_{i=1}^{l}R_i$$
$$R_i=(A_i^c\times Y)\cup(A_i\times B_i),i=1,2,\cdots,l$$
$$R^{(2)}(x,y)=\bigwedge_{i=1}^{l}((1-A_i(x))\vee(A_i(x))\wedge B_i(y))$$

模型3：设$A_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\in F(X)$，$B_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{im})\in F(X)$，$i=1,2,\cdots,l$，则多段模糊条件语句的真域$R^{(3)}$满足模糊关系方程

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{l1}&a_{l2}&\cdots&a_{ln}\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}&\cdots&r_{1m}\\r_{21}&r_{22}&\cdots&r_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\r_{n1}&r_{n2}&\cdots&r_{nm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{l1}&b_{l2}&\cdots&b_{lm}\end{bmatrix}$$

简记为 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{B}$，我们取其最大解作为真域 $\boldsymbol{R}^{(3)}$. 如果无解，说明多段条件语句不相容，可以适当加以调整.

习 题 6

1. 设 $X=\{1,2,3,4\}$，且有语言值

$$[小]=\frac{0.2}{1}+\frac{0.4}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{1}{4},\quad [大]=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.2}{4}$$

试用模糊集表示[很小]、[相当小]、[很大]、[比较大]、[不大也不小]、[不很小]以及[偏向大].

2. 设(a)，(b)为模糊判断句，其真域分别为 A 和 B，试证明$(a)\vee(b)$的真域是 $A\cup B$；$(a)\wedge(b)$的真域是 $A\cap B$；$\neg(a)$的真域是 A^c.

3. 设$(a)\to(b)$的真域为$(A\times B)\cup(A^c\times C)$，试证明：

(1) 肯定前件(条件)的假言推理(MP)：如果$(a)\to(b)$是模糊定理，且(a)对 x 为模糊真，则(b)对 x 为模糊真，且 $T((b)(x))\geqslant T(((a)\to(b))(x))$.

(2) 否定后件(结论)的假言推理(MT)：如果$(a)\to(b)$是模糊定理，且(b)对 x 为模糊假，则(a)对 x 为模糊假，且 $T((a)(x))=1-T(((a)\to(b))(x))$.

(3) 复合规则：如果$(a)\to(b)$与$(b)\to(c)$都是模糊定理，则$(a)\to(c)$是模糊定理，且 $T(((a)\to(c))(x))\geqslant T(((a)\to(b))(x))\wedge T(((b)\to(c))(x))$.

这里 A 和 B 分别是(a)和(b)的真域.

4. 设 $X=Y=\{1,2,3,4,5\}$，且

$$[轻]=\frac{1}{1}+\frac{0.9}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.1}{5},\quad [重]=\frac{0.1}{1}+\frac{0.3}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.9}{4}+\frac{1}{5}$$

模糊推理句"若 x 是 a，则 y 是 b"的真域 $R_1=(A\times B)\cup(A^c\times Y)$，又若模糊条件语句"若 x 是 a，则 y 是 b 否则 y 是 c"的真域 $R_2=(A\times B)\cup(A^c\times C)$，其中，$A,B,C$ 分别是(a)，(b)，(c)的真域. 试回答下列问题：

(1)"若 x 很重，则 y 很轻"的真域是什么？

(2)"若 x 重，则 y 轻"，已知 x 很重，试问 y 如何？

(3)"若 x 重，则 y 轻，否则 y 不很轻"，已知 x 很重，试问 y 如何？已知 y 略重，试问 x 如何？

5. 设身高 $X=[0,250]$(单位 cm)，而体重 $Y=[0,200]$(单位 kg)，并且

$$[高](x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 145\\ \dfrac{x-145}{50}, & 145<x<195\\ 1, & 195\leqslant x\leqslant 250\end{cases}$$

$$[\text{重}](x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 40\\ \dfrac{x-40}{60}, & 145<x<100\\ 1, & 100\leqslant x\leqslant 200\end{cases}$$

(1)试用模糊集表示[不高],[很高],[略重]和[较重].

(2)利用第4题的模型,求“若 x 高,则 y 重,否则 y 不很重”的真域,又设某人的身高175cm,体重65kg,那么此人对上述模糊推理是否模糊真的?

6. 设 $X=Y=\{1,2,3,4,5\}$,且

$$[\text{小}]=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.1}{4}$$

$$[\text{中}]=\frac{0.2}{1}+\frac{0.6}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.2}{5}$$

$$[\text{大}]=\frac{0.1}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{1}{5}$$

选用两种办法求“若 x 小则 y 大,否则若 x 大则 y 小,否则 y 中”的真域,并回答下列问题:

(1)若 x 很小,试问 y 如何?

(2)若 x 略小,试问 y 如何?

(3)若 x 不小也不大,试问 y 如何?

(4)若 y 不很小,试问 x 如何?

第7章 模糊控制

§7.1 模糊控制的基本思想

在控制工程中,有一些复杂被控对象的特性难以用一般物理及化学的已有规律来描述,而且无适当测试手段,以致不可能为其建立数学模型.对于这类不具有任何数学模型的被控对象,应用传统的控制理论,包括现代控制理论很难取得满意的控制效果.然而,这类被控对象在人的手动操作下却往往能正常运行,并达到一定预期的效果.

人的手动控制策略是通过操作者的学习、试验以及长期经验积累而形成的,人的手动控制可以通过人的自然语言加以叙述,属于一种语言控制.由于语言控制具有模糊性,故这种语言控制也称为模糊语言控制,或简称模糊控制.

为实现模糊控制,语言变量的概念可以作为描述手动控制策略的基础,并在此基础上发展了一种新型控制器——模糊控制器.在模糊控制中,模糊控制器的作用在于通过电子计算机,根据由精确量转化来的模糊输入信息,按照总结手动控制策略取得的语言控制规则进行模糊推理,给出模糊输出判决,并再将其转化为精确量,作为反馈送到被控对象的控制,这反映人们在对被控对象进行控制中,不断将观察到的过程输出精确量转化为模糊量,经过人脑的思维与逻辑推理取得模糊判决后,再将判决的模糊量转化为精确量,去实现手动控制的整个过程.可见,模糊控制器体现了模糊集合论、语言变量及模糊推理在不具有数学模型,而控制策略只有以语言形式定性描述的复杂被控过程中的有效应用.模糊控制器的基本结构如图7.1所示.

要设计一个模糊控制器以实现语言控制,必须解决以下三个方面问题:

(1)精确量的模糊化,把语言变量的语言值化为适当论域上的模糊子集;

(2)模糊控制算法的设计,通过一组模糊条件语句构成模糊控制规则,并计算模糊控制规则决定的模糊关系;

(3)输出信息的模糊判决,并完成由模糊量到精确量的转化.

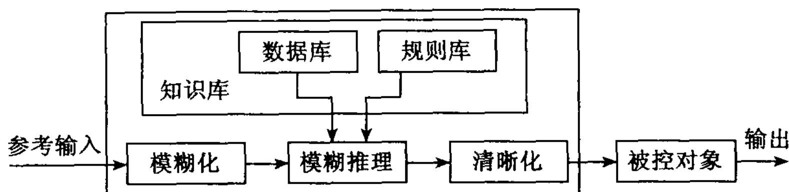


图 7.1 模糊控制器的结构图

§7.2 模糊控制器的设计

7.2.1 精确量的模糊化

模糊化运算是将输入空间的观测量映射为论域上的模糊集合. 模糊化在处理不确定信息方面具有重要的作用. 在模糊控制中,观测到的数据常常是清晰量. 由于模糊控制器对数据进行处理是基于模糊集合的方法,因此对输入数据进行模糊化是必不可少的一步. 模糊化的具体过程如下:

(1)首先对这些输入量进行处理,使其变成模糊控制器要求的输入量. 例如,常见的情况是计算 $e=r-y$ 和 $\dot{e}=\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$,其中 r 表示参考输入,y 表示系统输出,e 表示偏差,$\dot{e}$ 表示偏差的导数,即偏差的变化率.

(2)将上述已经处理过的输入量进行模糊量化处理,使其变换到各自的论域范围.

(3)将已经变换到论域范围的输入量进行模糊处理,使原先精确的输入量变成模糊量,并用相应的模糊集合来表示.

在模糊控制中主要采用以下三种模糊化方法.

1. 单点模糊化

如果输入量数据 x_0 是准确的,则通常将其模糊化为单点模糊集合. 设该模糊集合用 A 表示,则有 $A(x)=\begin{cases}1, x=x_0\\0, x\neq x_0\end{cases}$,其隶属度函数如图 7.2 所示.

这种模糊化方法只是形式上将清晰量转变成了模糊量,而实质上该方法表示的仍是准确量. 在模糊控制中,当测量数据准确时,采用这样的模糊化方法是十分自然和合理的.

2. 三角形模糊化

如果输入量数据存在随机测量噪声,这时模糊化运算相当于将变化量变换为

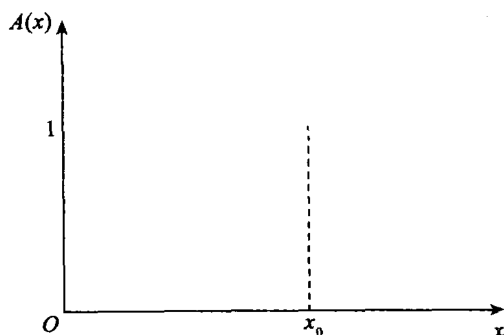


图 7.2　单点模糊集合的隶属函数

模糊量. 对于这种情况,可以取模糊量的隶属度函数为等腰三角形,如图 7.3 所示. 三角形的顶点相应于该随机数的均值,底边的长度等于 2σ,σ 表示该数据的标准差. 隶属度函数取三角形主要是考虑其表示方便,计算简单.

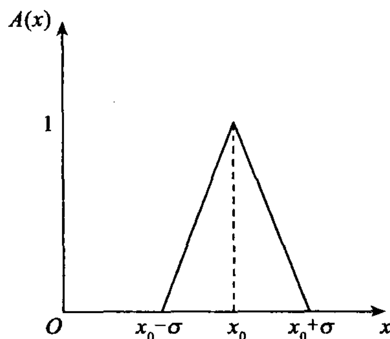


图 7.3　三角形模糊集合的隶属函数

3. 高斯型模糊化

另一种常用的方法是取隶属度函数为棱形函数,即

$$A(x) = e^{-\frac{x-x_0}{2\sigma^2}}$$

上式就是正态分布的函数.

7.2.2　数据库

数据库中存放的是与模糊控制规则及模糊数据处理有关的各种参数,其中包括模糊量化处理参数、模糊空间划分和隶属函数的选择等.

1. 量化因子与比例因子

设计模糊控制器时，一般首先要将系统的输入变量偏差、偏差变化率进行模糊量化处理. 把系统输入变量偏差及偏差变化率的实际变化范围称为这些变量的基本论域.

设输入变量偏差的基本论域为$[-X_e, X_e]$以及输入变量偏差所取的模糊集合的论域为$X=\{-n,-n+1,\cdots,0,\cdots,n-1,n\}$，其中$X_e$表征输入变量偏差大小的精确量，$n$是在$0\sim X_e$范围内连续变化的输入变量偏差量化后分成的等级数，这些等级数构成论域X的元素，一般常取$n=6$或7. 在实际的控制系统中，输入变量偏差的变化一般不是论域X中的元素. 在这种情况下，需要通过所谓量化因子进行论域变换. 定义输入变量偏差的量化因子为

$$k_e=\frac{n}{X_e} \tag{7.1}$$

一旦量化因子k_e选定，系统的任何输入变量偏差x总可以量化为论域X上的某一个元素. 例如，已知输入变量偏差为x，则这种元素必属于下列三种情况之一：

(1) $l\leqslant k_e x\leqslant l+1, l<n$;

(2) $k_e x<-n$;

(3) $n<k_e x$.

对于情况(2)及(3)，分别将x量化为$-n$与n. 对于情况(1)，若$l\leqslant k_e x\leqslant l+\frac{1}{2}$，则将$x$量化为$l$；若$l+\frac{1}{2}\leqslant k_e x\leqslant l+1$，则将$x$量化为$l+1$，$l$为某一整数.

从式(7.1)给出的量化因子定义可见，一旦给定论域X，即选定基本论域$[-X_e, X_e]$的量化等级数n之后，量化因子k_e的取值大小可以使基本论域$[-X_e, X_e]$发生不同程度的缩小与放大，即当k_e大时，基本论域$[-X_e, X_e]$缩小，而当k_e小时，基本论域$[-X_e, X_e]$放大.

同理，对于输入变量偏差变化率的基本论域$[-X_{\dot{e}}, X_{\dot{e}}]$以及输入变量偏差变化率所取的模糊集合的论域为$Y=\{-n,-n+1,\cdots,0,\cdots,n-1,n\}$，则输入变量偏差变化率的量化因子定义为

$$k_{\dot{e}}=\frac{n}{X_{\dot{e}}} \tag{7.2}$$

其中量化因子$k_{\dot{e}}$具有与k_e完全相同的特性.

对于输出变量的变化u，基于量化因子的概念，定义

$$k_u=\frac{Y_u}{n} \tag{7.3}$$

为其比例因子. 其中，$[-Y_u, Y_u]$为输出变量的基本论域，n为基本论域$[-Y_u, Y_u]$的量化等级数. 从式(7.3)可见，比例因子k_u与量化等级数n之积便是实际输出变

量 u 的变化.

2. 输入和输出空间的模糊分割

模糊控制规则中前提的语言变量构成模糊输入空间,结论的语言变量构成模糊输出空间.每个语言变量的取值为一组模糊语言名称,它们构成了语言名称的集合.每个模糊语言名称对应一个模糊集合,其个数决定了模糊控制精细化的程度.这些语言名称通常均具有一定的含义.如负大(NB),负中(NM),负小(NS),零(NE),正小(PS),正中(PM)和正大(PB).

模糊分割的个数也决定了最大可能的模糊规则的个数.如对于两个输入单输出的模糊系统,x 和 y 的模糊分割数分别为 3 和 7,则最大可能的规则数为 $3\times7=21$.可见,模糊分割数越多,控制规则数也越多,所以模糊分割不可太细,否则需要确定太多的控制规则,这也是很困难的一件事.当然,模糊分割数太小将导致控制太粗略,难以对控制性能进行精心的调整.

7.2.3 模糊控制规则库

模糊控制器的规则是基于专家知识或人工操作熟练人员长期积累的经验,其规则是按人的直觉推理的一种语言表示形式.模糊规则通常有一系列的关系词连接而成.如 if-then、else、also、and、or 等.在模糊控制中,常见的模糊控制器有下列几种:

1. 单输入单输出模糊控制器

这类控制器具有如下的形式

$$R^{(l)}:\text{如果 } x \text{ 是 } A^l,\text{则 } y \text{ 是 } B^l \tag{7.4}$$

其中,模糊集合 A^l 和 B^l 分别是输入论域 X 和输出论域 Y 上的模糊集合,$x\in X$ 和 $y\in Y$ 分别是模糊系统的输入和输出(语言)变量,$l=1,2,\cdots,m$.

2. 双输入单输出模糊控制器

这类控制器具有如下的形式

$$R^{(l)}:\text{如果 } x_1 \text{ 是 } A_1^l \text{ 且 } x_2 \text{ 是 } A_2^l,\text{则 } y \text{ 是 } B^l \tag{7.5}$$

其中,模糊集合 A_i^l 和 A^l 分别是输入论域 X_i 和输出论域 Y 上的模糊集合,$x_i\in X_i$ 和 $y\in Y$ 分别是模糊系统的输入和输出(语言)变量$(i=1,2)$,$l=1,2,\cdots,m$.

3. 多输入单输出模糊控制器

这类控制器具有如下的形式

$$R^{(l)}:\text{如果 } x_1 \text{ 是 } A_1^l \text{ 且 } x_2 \text{ 是 } A_2^l \text{ 且}\cdots\text{且 } x_n \text{ 是 } A_n^l,\text{则 } y \text{ 是 } B^l \tag{7.6}$$

其中,模糊集合 A_i^l 和 B^l 分别是输入论域 X_i 和输出论域 Y 上的模糊集合,$x_i\in X_i$ 和 $y\in Y$ 分别是模糊系统的输入和输出(语言)变量$(i=1,2,\cdots,n)$,$l=1,2,\cdots,m$.

4. 双输入多输出模糊控制器

这类控制器具有如下的形式

$R^{(l)}$：如果 x_1 是 A_1^l 且 x_2 是 A_2^l，则 y_1 是 B_1^l 且 y_2 是 B_2^l 且…且 y_n 是 B_n^l (7.7)

其中，模糊集合 A_i^l 和 B_j^l 分别是输入论域 X_i 和输出论域 Y_j 上的模糊集合，$x_i \in X_i$ 和 $y_j \in Y_j$ 分别是模糊系统的输入和输出（语言）变量($i=1,2;j=1,2,\cdots,n$)，$l=1,2,\cdots,m$.

7.2.4 输出信息的清晰化

不失一般性，考虑两个输入一个输出的控制器，并设已建立了模糊控制规则库. 设已知模糊控制器的输入模糊量为 x 是 A' 且 y 是 B'，则根据模糊控制规则进行近似推理，可以得出输出模糊量 z（用模糊集合 C' 表示）为

$$C' = (A' \text{and } B') \circ R$$

其中

$$R = \bigcup_{l=1}^{n} R^{(l)}, \quad R^{(l)} = (A^l \text{and } B^l) \to C^l.$$

其中包括三种主要的模糊逻辑运算：and 运算、合成运算“∘”和蕴含运算“→”. and 运算通常采用求交（取小）或求积（代数积）的方法；合成运算“∘”通常采用最大—最小或最大—积（代数积）的方法；蕴含算子“→”通常采用求交(R_c)或求积(R_p)的方法.

以上通过模糊推理得到的是模糊量，而对于实际的控制规则必须为清晰量，因此需要将模糊量转换成清晰量，这就是清晰化计算所要完成的任务. 清晰化计算通常有以下几种方法：

1. *最大隶属度法*

这种方法是在输出模糊集合中选取隶属度最大的论域元素为判决结果，如果在多个论域元素上同时出现隶属度最大值，则取它们的平均值作为判决结果.

例 7.2.1 设已知论域{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1,0,1,2,3,4,5,6,7}上的输出模糊集合 C' 为

$$C' = \frac{0.7}{-7}+\frac{0.7}{-6}+\frac{0.3}{-5}+\frac{0.3}{-4}+\frac{0.3}{-3}+\frac{0.2}{-2}+\frac{0.7}{-1}+\frac{0.7}{0}+\frac{0.7}{1}+\frac{0.2}{2}+\frac{0.2}{5}+\frac{0.3}{6}+\frac{0.3}{7}$$

则按最大隶属度法取得判决结果为

$$C' = \frac{1}{5}(-7-6-1+0+1) = -2.6.$$

这种方法的优点是简单易行，其缺点是概括的信息量较少. 这是因为，该方法排除了其他一切隶属度较小的论域元素（量化等级）的作用.

2. *取中位数法*

为充分利用输出模糊集合所包含的信息. 可以将描述输出模糊集合的隶属函数曲线与横坐标围成的面积的均分点对应的论域元素作为判决结果. 这种方法称为取中位数法.

例 7.2.2 以离散情况为例，设已知与例 7.2.1 相同的输出模糊集合 C'，则隶

属函数 $C'(x)$ 与横坐标 x 围成的面积 S 为

$$S=(0.7+0.7+0.3+0.3+0.3+0.2+0.7+0.7+0.7+0.2+0.2+0.3)\times 1=5.3$$

上述面积的一半为

$$\frac{1}{2}S=2.65.$$

根据 $\frac{1}{2}S=2.65$，计算出面积 S 的均分点对应的论域元素为 -1. 于是，可以取 -1 对应的精确量作为实际的控制量变化.

3. 加权平均法

这种方法针对论域中的每个元素 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，以 x_i 作为待判决输出模糊集合 C' 的隶属度 $C'(x)$ 的加权系数，即取乘积 $x_iC'(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$，再计算该乘积 $\sum_{i=1}^{n}x_iC'(x_i)$ 对于隶属度和 $\sum_{i=1}^{n}C'(x_i)$ 的平均值 x_0，即

$$x_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iC'(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}C'(x_i)}$$

平均值 x_0 便是应用加权平均法为模糊集合 C' 求得的判决结果. 因为 x_0 是隶属函数曲线 $C'(x)$ 与横作标 x 围成区域面积的重心坐标之一，所以上式所示加权平均法有时也称为重心法. 加权平均法的优点在于其直观合理，言之有据. 其缺点在于其计算要求高.

例 7.2.3 设已知与例 7.2.1 相同的输出模糊集合 C'，用加权平均法计算清晰值 x_0 为

$$x_0=\frac{-7\times0.7-6\times0.7-5\times0.3-4\times0.3-3\times0.3-2\times0.2-1\times0.7+1\times0.7+2\times0.2+5\times0.2+6\times0.3+7\times0.3}{0.7+0.7+0.3+0.3+0.3+0.2+0.7+0.7+0.7+0.2+0.2+0.3+0.3}$$

$$=\frac{-7.6}{5.6}=-1.36.$$

对 x_0 取整后，可以取 -1 级对应的精确量作为实际的控制量变化.

§7.3 模糊控制器实例

作为基本模糊控制器设计的总结，下面介绍冶炼金属钨的九管还原炉的温度模糊控制系统.

7.3.1 控制对象的特点及控制任务

金属钨的熔点大于 3 000℃，目前尚不能采用通常的冶炼法，而只能采用粉末冶金法来处理. 九管还原炉就是用来对氧化钨粉末还原去氧的冶炼装置. 该装置先

通过一次还原将 WO_3 还原成 WO,然后再通过二次还原将 WO 还原成 W. 九管还原炉有 9 根焙烧管道,其中上层 5 根,下层 4 根,在其上、下部分装有电热丝,用以控制 6 个温区的温度. 在每个温区的几何中心线上装一只热电偶,用以检测本温区的温度. 6 个温区的温度给定值为 500 ~ 850℃.

控制任务是将 6 个温区的温度控制在给定值的附近,偏差不允许超过 ±5℃. 手动控温时,偏差波动很大,往往大于 ±15℃以上,影响钨粉冶炼质量、考虑到 9 管还原炉的精确数学模型较难建立,决定采用模糊控温方案.

7.3.2 模糊控制器的设计

对于该系统,在总结手动控制策略的基础上采用基本模糊控制器,以实现整个系统的模糊控温方案. 从工艺角度来看,由于要求 9 管还原炉采用恒值控温,可以将其视为本温区温度给定值的一部分. 依此处理,6 个温区就可以分别视为结构相同且相互独立的 6 个温控系统. 因此,只需考虑一套基本模糊控制器的设计.

1. 模糊控制器的语言变量

模糊控制器的输入语言变量可以选为实际温度 y 与温度给定值 y_g 之间的偏差 $e=y-y_g$ 及其变化率 $\dot{e}$,而其输出语言变量可以选为控制通过加热装置的电流的可控硅导通角的变化量 u. 这样,就为温控系统选定了一个双输入单输出的模糊控制器.

2. 输入语言变量偏差 E、偏差变化 EC 和输出语言变量(控制量变化)U 的赋值表

设偏差 e 的基本论域为[-30℃, +30℃],若选定 E 的论域

$$X=\{-6,-5,\cdots,-0,+0,\cdots,+5,+6\}$$

则得偏差 e 的量化因子 $k_e=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$. 为语言变量 E 选取 8 个语言值:PB,PM,PS,P0,N0,NS,NM 和 NB.

通过操作者的实践经验总结,可以确定出在论域 X 上用以描述模糊子集 PB,…,NB 的隶属函数,并据此建立语言变量 E 的赋值表,如表 7.1 所示.

设偏差变化率 $\dot{e}$ 的基本论域为[-24,24],若选定 EC 的论域 $Y=\{-6,-5,\cdots,0,\cdots,+5,+6\}$,则得偏差变化率 $\dot{e}$ 的量化因子 $k_{\dot{e}}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$. 为语言变量 EC 选取 PB,PM,PS,0,NS,NM 和 NB 共 7 个语言值.

通过操作者的实践经验总结,在确定出模糊子集 PB,…,NB 的隶属函数之后,便可以建立语言变量 EC 的赋值表,如表 7.2 所示.

表 7.1　　语言变量 E 赋值表（空白处均为零）

$\mu(x)$ \ E 语言值	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
PB												0.2	0.7	1
PM										0.2	0.7	1	0.7	0.2
PS								0.1	0.7	1	0.7	0.1		
P0								1	0.7	0.1				
N0					0.1	0.7	1							
NS			0.1	0.7	1	0.7	0.1							
NM	0.2	0.7	1	0.7	0.2									
NB	1	0.7	0.2											

表 7.2　　语言变量 EC 赋值表（空白处均为零）

$\mu(x)$ \ EC 语言值	-6	-5	-4	-3	-2	-1	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
PB											0.2	0.7	1
PM									0.2	0.8	1	0.8	0.2
PS								0.8	1	0.8	0.2		
0						0.5	1	0.5					
NS			0.2	0.8	1	0.8							
NM	0.2	0.8	1	0.8	0.2								
NB	1	0.7	0.2										

设控制变化量 u 的基本论域为[-36, +36]，若选定 U 的论域为

$$Z = \{-6, -5, \cdots, 0, \cdots, +5, +6\},$$

则得控制变化量 u 的比例因子 $k_u = \frac{36}{6} = 6$. 同样，为语言变量 u 选取 PB，PM，PS，0，NS，NM 和 NB 共 7 个语言值. 通过操作者的实践经验总结，在确定出模糊子集 PB，…，NB 的隶属函数之后，便可以建立语言变量 U 的赋值表，如表 7.3 所示.

表 7.3　　语言变量 U 赋值表(空白处均为零)

$\mu(x)$ \ U / 语言值	-6	-5	-4	-3	-2	-1	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
PB											0.2	0.7	1
PM									0.2	0.8	1	0.8	0.2
PS							0.1	0.8	1	0.8	0.1		
0						0.5	1	0.5					
NS			0.1	0.8	1	0.8	0.1						
NM	0.2	0.8	1	0.8	0.2								
NB	1	0.7	0.2										

3. 模糊控制状态表

基于操作者手动控制策略的总结、得出一组由 52 条模糊条件语句构成的控制规则,将这些模糊条件语句加以归纳,可以建立反映九管还原炉温控系统控制规则的模糊控制状态表,如表 7.4 所示. 表 7.4 中有 × 号的空格代表不可能出现的情况,称为死区.

表 7.4　　模糊控制状态表

U \ E / EC	NB	NM	NS	N0	P0	PS	PM	PB
PB	PB	PM	NM	NM	NM	NB	NB	×
PM	PB	PM	NM	NM	NM	NS	NS	×
PS	PB	PM	NS	NS	NS	NS	NM	NB
0	PB	PM	PS	0	0	NS	NM	NB
NS	PB	PM	PS	PS	PS	PS	NM	NB
NM	×	PB	PS	PS	PM	PM	NM	NB
NB	×	PB	PB	PM	PM	PM	NM	NB

模糊控制状态表 7.4 包含的每一条模糊条件语句都决定一个模糊关系,它们共有 52 个. 例如,R_1 和 R_2 分别表示若 E 是 NB 且 EC 是 PB,则 U 是 PB 和若 E 是 NM 且 EC 是 PB,则 U 是 PM.

通过 52 个模糊关系 $R^{(l)}$ $(l=1,2,\cdots,52)$ 的"并"运算,可以获取表征九管还原炉温控系统控制规则的总和模糊关系 R,即

$$R = \bigcup_{l=1}^{52} R^{(l)}$$

其中模糊关系 $R^{(l)}$ ($l=1,2,\cdots,52$) 及 R 的计算均可离线进行.

4. 查询表

计算出模糊关系 R 后,基于推理合成规则,由系统偏差 e 的论域

$$X = \{-6, -5, \cdots, -0, +0, \cdots, +5, +6\}$$

和偏差变化率 $\dot{e}$ 的论域

$$Y = \{-6, -5, \cdots, 0, \cdots, +5, +6\}$$

根据语言变量偏差 E 和偏差变化 EC 赋值表,针对论域 X, Y 全部元素的所有组合,求取相应的语言变量 U 的模糊集合,并应用最大隶属度法对上述模糊集合进行模糊判决,取得以论域 $Z = \{-6, -5, \cdots, 0, \cdots, +5, +6\}$ 的元素表示的控制量的变化量 u.

在上述离线计算的基础上,便可以建立如表 7.4 所示查询表. 查询表 7.4 是九管还原炉温控系统模糊控制算法总表,把表 7.4 存放到计算机的存储器中,并编制一个查找查询表的子程序. 在实际控制过程中,只要在每一个控制周期中,将采集到的实测偏差 $e(k)$ ($k=0,1,2,\cdots$) 和计算得到的偏差变化 $e(k)-e(k-1)$ 分别乘以量化因子 k_e 和 $k_{\dot{e}}$ 取得以相应论域元素表征的查找查询表 7.4 的相应行和列,立即可以输出所需的控制量变化 $u_{i,j}$,再乘以比例因子 k_u,便是加到被控过程的实际控制量变化值.

九管还原炉温控系统通过上述基本模糊控制器实现模糊控制后,取得了控制速度快,超调量小,稳定性好,对参数变化不敏感等一系列优于传统控制器的良好控制效果.

习 题 7

1. 考虑对水温的控制

设语言值:大、中、小是论域 $X = \{1,2,3,4,5\}$ 上的模糊集. 水温偏差 x 与控制量(即热量) y,有如下关系:

若 x 大,则 y 大;

若 x 中,则 y 中;

若 x 小,则 y 小.

(1) 试给出模糊集【大】,【中】,【小】的定义;

(2) 叙述对水温的控制过程. (设输入量 $A =$【大】).

2. 设计一个炉温控制器.

炉温偏差 $x \in X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;

控制量 $y \in Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

控制规则如表 7.5 所示.

表 7.5

观察量	正大	正小	零	负小	负大
控制量	负大	负小	零	正小	正大

写出表示控制规则的模糊关系 R.

3. 设想一个二维输入一维输出的模糊系统,是由以下两条规则构造而成的:

如果 x_1 是 A_1,x_2 是 A_2,则 y 是 A_1

如果 x_1 是 A_2,x_2 是 A_1,则 y 是 A_2

其中,A_1 和 A_2 是 R 上的模糊集,其隶属函数分别为

$$A_1(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$A_2(x)=\begin{cases}1-|x-1|, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

假设模糊系统的输入为$(x_1^*,x_2^*)=(0.3,0.6)$,模糊系统选用单值模糊器.在下述情况下确定模糊系统的输出 y^*:

(1)模糊量的精确化使用最大隶属度法;

(2)模糊量的精确化使用重心法;

(3)模糊量的精确化使用中位数法.

第8章　模糊决策

所谓决策就是针对某些既定的目标将多种可能采取的策略加以比较,选定最优策略. 这种问题往往带有模糊性和经验性,因此采用模糊集方法处理就比较自然. 模糊决策就是研究在模糊环境下或者在模糊系统中进行决策的数学理论与方法. 模糊决策的目标是把决策论域中的对象在模糊环境下进行排序,或者按某些模糊限制条件从决策论域中选择出最优对象. 本章将介绍模糊决策的基本原理与方法.

§8.1　二元对比排序法

本节考虑通过二元对比对论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 中的元素进行排序(排成线性序、线性预序或偏序)的问题. 由于对象的复杂性、模糊性,确定元素间的先后顺序往往是困难的. 例如,假定 A 表示"漂亮"这个模糊集,其标准是因人而异的,如果 A(甲),A(乙),A(丙)表示甲、乙、丙三位电影明星对 A 的隶属度,则时常会出现这样一种情况 $A(甲)>A(乙)$,$A(乙)>A(丙)$,但 A(甲)不一定排在 A(丙)前面,这里"$>$"表示一种序关系. 即论域的任意两个元素之间虽然可以比较,但传递性不成立,如何利用两两元素间对比的信息来确定整体的排列顺序呢? 下面介绍几种常见的处理方法.

8.1.1　优先关系定序法

设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,记 c_{ij}表示 u_i 比 u_j 优越的成分,即 u_i 与 u_j 相比较时,u_i 的长处($i,j=1,2,\cdots,n$). 要求 c_{ij}满足以下三个条件:①$c_{ii}=0$;②$0\leqslant c_{ij}\leqslant 1$;③$c_{ij}+c_{ji}=1$,$i\neq j$. 这里,条件①表明 u_i 不比自身有更多的好处;条件②表明 u_i 比 u_j 的优越成分 c_{ij} 要介于0与1之间;而条件③则说明 u_i 与 u_j 的长处之和为1. 这样当 u_i 与 u_j 相比较,发现 u_i 尽是长处,u_j 一无是处,则取 $c_{ij}=1$,$c_{ji}=0$;当 u_i 与 u_j 相比较,发现二者平分秋色,各有千秋,分不出高低时,则取 $c_{ij}=c_{ji}=0.5$;而一般地确定 c_{ij}时要兼顾 c_{ji},使 c_{ij}与 c_{ji}协调起来. 于是可以得矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$$

称为优先关系矩阵. 利用矩阵 $\boldsymbol{C}$,可以实现 U 中元素的定序,其过程如下:

(1)取 $\lambda\in[0,1]$,让 λ 从1连续下降,若首次出现截矩阵 $\boldsymbol{C}_{\lambda_1}$使得其第 i_1 行除

对角线元素之外，均为 1，则认为 u_{i_1} 是第一领先元素(不一定唯一).

(2)在 $\boldsymbol{C}$ 中划去第 i_1 行、第 i_1 列，仍得一个优先关系矩阵 $\boldsymbol{C}^{(1)}$.

(3)使用(1)中的过程处理矩阵 $\boldsymbol{C}^{(1)}$，则得第二领先元素 u_{i_2}.

(4)重复步骤(2)、(3)，直到全体的对象排定次序.

例 8.1.1 设 $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ 表示三位电影明星，某位观众通过两两比较得出优先关系如下

$$\begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & \\ \boldsymbol{C}= & \left[\begin{matrix} 0 & 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.7 \\ 0.8 & 0.3 & 0 \end{matrix}\right] & & & \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

求 U 的排序.

解 通过求截矩阵可见

$$\boldsymbol{C}_{0.9}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_{0.8}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{C}_{0.3}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} u_1 \\ u_2. \\ u_3 \end{matrix}$$

当 λ 从 1 降到 0.3 时，$\boldsymbol{C}_{0.3}$ 中首次出现第三行除对角线元素外，全为 1，故 u_3 为第一领先. 划去 $\boldsymbol{C}$ 的第三行第三列，得

$$\boldsymbol{C}^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & 0.9 \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}.$$

对 $\boldsymbol{C}^{(1)}$，由于 $\boldsymbol{C}_{0.9}^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，首次出现第一行除对角线元素外，全为1，故 u_1 为第二领先. 从而 U 的排序为：u_3,u_1,u_2.

该方法定序的着眼点放在“长处一致超过 λ”，在例 8.1.1 中，$\boldsymbol{C}_{32}=0.3$，$\boldsymbol{C}_{23}=0.7$ 表明 u_3 长于 u_2 三分，而 u_2 长于 u_3 七分，单独比较 u_2,u_3，则 u_3 不如 u_2，但从一致性考虑，u_3 仍排在 u_2 之前.

8.1.2 相对比较法

对于元素 x,y，记 $f_y(x)$ 表示 x 相对于 y 而言有“吸引力”的指标，即以 y 为标准，看 x 有哪些优点. 要求 $f_y(x)$ 满足：① $f_x(x)=1$；② $0\leqslant f_y(x)\leqslant 1$，令

$$f(x|y)=\frac{f_y(x)}{\max\{f_x(y),f_y(x)\}}=\min\left\{1,\frac{f_y(x)}{f_x(y)}\right\} \tag{8.1}$$

称为相对函数. 易见 $f(x|y)\in[0,1]$，$f(x|x)=1$，$\max\{f(x|y),f(y|x)\}=1$. 设论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，记

$$r_{ij}=f(u_i|u_j),\ i,j=1,2,\cdots,n$$

则得一矩阵

$$R = (r_{ij})_{n\times n}$$

称为相对优先矩阵,R 满足:$r_{ii}=1, r_{ij}\in[0,1], r_{ij}\vee r_{ji}=1$. 利用矩阵 R,可以实现 U 的排序,其过程如下:

(1)记 $\rho(x)=f(x\mid U)=\min\limits_{u_i\in U}f(x\mid u_i)$,若 $\rho(\hat{u})=\max\limits_{u_i\in U}\rho(u_i)$,则 $\hat{u}$ 为第一领先.

(2)对 $U-\hat{u}$,重复步骤(1)的过程,直到全体对象次序排定.

实际排序过程列入表格中进行,下面举例说明.

例 8.1.2 设 $U=\{$长子(x),次子(y),幼子$(z)\}$,按"谁最像父亲"排序. 已知

$$f_x(x)=1,\ f_y(x)=0.8,\ f_z(x)=0.5$$
$$f_x(y)=0.5,\ f_y(y)=1,\ f_z(y)=0.4$$
$$f_x(z)=0.3,\ f_y(z)=0.7,\ f_z(z)=1$$

其中 $f_y(x)=0.8$ 表示长子对照次子像父亲的程度为 0.8,其余类推.

解 由相对函数定义计算出各相对函数的数值并列表,如表 8.1 所示.

表 8.1 相对函数排序过程

	x	y	z	$\rho=\min$(按行)
x	$f(x\mid x)=1$	$f(x\mid y)=1$	$f(x\mid z)=1$	1
y	$f(y\mid x)=\frac{5}{8}$	$f(y\mid y)=1$	$f(y\mid z)=\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$
z	$f(z\mid x)=\frac{3}{5}$	$f(z\mid y)=1$	$f(z\mid z)=\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$

由表 8.1 中最后一列可见:$1>\frac{3}{5}>\frac{4}{7}$,即 $\rho(x)>\rho(z)>\rho(y)$,所以排序为 xzy,即长子最像父亲,幼子次之,次子最不像.

8.1.3 对比平均法

设论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,$\forall x\in U$,定义

$$f(x\mid U)=\sum_{i=1}^{n}a_i f_{u_i}(x) \tag{8.2}$$

其中,a_i 是加在 u_i 上的权重,要求 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1, a_i>0$. $f_{u_i}(x)$ 表示 x 相对 u_i 而言"有吸引力"的指标,按 $f(x\mid U)$ 从大到小排序. 这种方法称为对比平均法,或称为加权平均法.

例 8.1.3 设 $U=\{$樱花(x),菊花(y),蒲公英$(z)\}$,考虑"美"的次序. 若已知

$$f_x(x)=1,\ f_y(x)=0.8,\ f_z(x)=0.9$$
$$f_x(y)=0.7,\ f_y(y)=1,\ f_z(y)=0.8$$
$$f_x(z)=0.5,\ f_y(z)=0.4,\ f_z(z)=1$$

试分别按权重$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$及$\frac{1}{10},\frac{8}{10},\frac{1}{10}$排序.

解 对权重$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$有

$$f(x|U)=\frac{1}{3}(1+0.8+0.9)=0.9$$

$$f(y|U)=\frac{1}{3}(0.7+1+0.8)=0.83$$

$$f(z|U)=\frac{1}{3}(0.5+0.4+1)=0.63$$

所以排序为 xyz,即樱花、菊花、蒲公英. 写成模糊集的形式为

$$A=\text{“美丽的花”}=\frac{0.9}{\text{樱花}}+\frac{0.83}{\text{菊花}}+\frac{0.63}{\text{蒲公英}}.$$

对于权重$\frac{1}{10},\frac{8}{10},\frac{1}{10}$,依同样方法可得

$$f(x|U)=0.83,\ f(y|U)=0.95,\ f(z|U)=0.47$$

所以排序为 yxz,即菊花、樱花、蒲公英. 由此可见,排序结果与权重的选取密切相关.

8.1.4 权重分析法

为了对论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 中的元素进行排序,从权重的角度考察这个问题. 如果客观上每个元素 u_i 有一个权重 $\omega_i=\omega(u_i)$,令

$$\boldsymbol{W}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$$

称为权重向量,那么按权重大小就可以得到 U 的排序. 两元素 u_i,u_j 的权重之比为 $\frac{\omega_i}{\omega_j}$,据此可以构造一个权重比矩阵 $\boldsymbol{M}$,即

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\frac{\omega_1}{\omega_1} & \cdots & \frac{\omega_1}{\omega_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\omega_n}{\omega_1} & \cdots & \frac{\omega_n}{\omega_n}\end{pmatrix}$$

由矩阵论可知:n 是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的唯一的最大的特征值,记 $\boldsymbol{\xi}$ 是对应于 n 的特征向量,则

$$\boldsymbol{M\xi}=n\boldsymbol{\xi}$$

由于权重向量 W 事先并不知道，因而权重比矩阵 M 也不知道，现在介绍一种求权重向量的方法，通过两两比较可以得到 $f_{u_j}(u_i)$，$f_{u_i}(u_j)$，令

$$t_{ij}=\frac{f_{u_j}(u_i)}{f_{u_i}(u_j)} \tag{8.3}$$

其中，$f_{u_j}(u_i)$ 与式(8.1)有相同的解释，将 t_{ij} 作为权重比 $\frac{\omega_i}{\omega_j}$ 的估计值，从而矩阵 $T=(t_{ij})_{n\times n}$ 可以作为矩阵 M 的一个估计矩阵. 用线性代数的方法可以求出矩阵 T 的最大特征值及其对应的特征向量，这个特征向量就可以作为估计的权重向量，从而利用 T 可实现 U 的一个排序.

由矩阵论的知识可见：T 的最大特征值 $\lambda_{\max}\geqslant n$ 且矩阵 T 的元素 t_{ij} 满足：① $t_{ii}=1$；② $t_{ij}\cdot t_{ji}=1$，若 T 还满足

$$t_{ij}\cdot t_{jk}=t_{ik},(\forall i,j,k) \tag{8.4}$$

则称 T 为相容矩阵. 如果 T 是相容矩阵，令

$$\omega_i=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}t_{ij}} \tag{8.5}$$

则有

$$\frac{\omega_i}{\omega_j}=\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}t_{ik}}}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}t_{jk}}}=\sqrt[n]{\frac{t_{i1}\cdot t_{i2}\cdot\cdots\cdot t_{in}}{t_{j1}\cdot t_{j2}\cdot\cdots\cdot t_{jn}}}$$

$$=\sqrt[n]{(t_{i1}\cdot t_{1j})\cdot(t_{i2}\cdot t_{2j})\cdots(t_{in}\cdot t_{nj})}=(t_{ij}\cdot t_{ij}\cdot\cdots\cdot t_{ij})^{1/n}=t_{ij}$$

因此，$\lambda_{\max}=n$，T 的最大特征值对应的特征向量也就是权重向量 $W=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$.

一般说来，矩阵 T 不一定相容，即条件(8.4)未必成立. 为了度量 T 的相容程度，定义一个不相容度 $C(T)$，即

$$C(T)=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1} \tag{8.6}$$

当 $C(T)\leqslant 0.1$ 时，就可以认为 T 的相容性好. 用 T 的最大特征值对应的特征向量作为权重向量是可以接受的.

一个特征值对应的特征向量一般不是唯一的，为了确定起见，可以取归一化的特征向量，即要求该向量的各分量之和等于 1.

当 U 的基数相当大时，计算 T 的特征值及其特征向量是一件相当费时的工作. 矩阵 T 与前面所述的相对优先矩阵有点类似，为了简化计算，可以用如下的变通方法.

(1)设矩阵 T 满足：若 $t_{ij}\geqslant 1$，$t_{jk}\geqslant 1$，则有 $t_{ik}\geqslant 1$ $(\forall i,j,k)$，那么，T 的相容性很好.

检验 T 满足这个条件可以这样进行：作一个“0—1”矩阵 $T'=(t'_{ij})_{n\times n}$. 使得

$$t_{ij}' = \begin{cases} 1, t_{ij} \geq 1 \\ 0, t_{ij} < 1 \end{cases}$$

若 $\boldsymbol{T}'$ 满足传递性，即 $\boldsymbol{T}' \circ \boldsymbol{T}' \subset \boldsymbol{T}'$，则认为 $\boldsymbol{T}$ 相容性好，否则认为 $\boldsymbol{T}$ 的相容性不好.

（2）如果 $\boldsymbol{T}$ 的相容性好，则取 $\omega_i' = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} t_{ij}}$，作为元素 u_i 的权重估计值. 必要时再对向量 $\boldsymbol{W}' = (\omega_1', \omega_2', \cdots, \omega_n')^{\mathrm{T}}$ 归一化，即

$$\left(\frac{\omega_1'}{\sum_i \omega_i'}, \frac{\omega_2'}{\sum_i \omega_i'}, \cdots, \frac{\omega_n'}{\sum_i \omega_i'} \right)$$

作为估计的权重向量.

例 8.1.4 设 $U = \{a, b, c\}$，a, b, c 表示三个玻璃杯，经过两两比较得

$$f_b(a) = 8, f_a(b) = 5, f_c(b) = 4, f_b(c) = 7, f_c(a) = 5, f_a(c) = 3$$

这里的吸引力指标 $f_{u_j}(u_i)$ 比前面的条件稍有放宽. 由此可得

$$f(a|b) = 1, f(b|a) = \frac{5}{8}, f(c|b) = 1, f(b|c) = \frac{4}{7}, f(a|c) = 1, f(c|a) = \frac{3}{5}$$

于是构成相对优先矩阵 $\boldsymbol{R}$ 如下

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{5}{8} & 1 & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{5} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由此可得 U 的排序为 acb.

用权重分析法再来考虑本例. 此时，由式(8.3)易算得

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{5} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{8} & 1 & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{5} & \frac{7}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{T}$ 的特征值. 即求 λ 满足

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{8}{5} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{8} & 1-\lambda & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{5} & \frac{7}{4} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

所以 $(1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) + 2.37 = 0$，解得 $\lambda_{\max} = 3.05$；计算不相容度

$$C(T) = \frac{\lambda_{\max} - 3}{3 - 1} \approx 0.025 \leq 0.1.$$

故 T 的相容性好. λ_{max}的归一化特征向量为(0.4,0.27,0.33),故排序为 acb,与优先关系定序法结果一致.

若采用变通方法,计算

$$T'\circ T'=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=T'$$

认为 T 的相容性好,计算 ω_i',得

$$\omega_1'=\sqrt[3]{\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{3}}\approx 1.39,\ \omega_2'=\sqrt[3]{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}}\approx 0.71,\ \omega_3'=\sqrt[3]{\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}}\approx 1.02$$

从而 $W'=(\omega_1',\omega_2',\omega_3')^{\mathrm{T}}\approx(1.39,0.71,1.02)$,归一化后得:(0.44,0.23,0.33),这与 λ_{max}的归一化特征向量非常接近,据此得排序为:acb.

8.1.5　反演法

利用$f_{u_j}(u_i)$提供的信息,定义一个优先比

$$\mu_R(x,y)=\frac{f_y(x)}{f_y(x)+f_x(y)} \tag{8.7}$$

记$\mu_R(u_i,u_j)=r_{ij}$,作一个矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$,则 R 是一个模糊矩阵. 满足 $r_{ij}+r_{ji}=1$,称 R 为反演矩阵. 对所有 $u_i\in U$,定义两个量

$$\tau(u_i)=\sum_{j=1}^{n}r_{ij} \tag{8.8}$$

$$\rho(u_i)=\min_{j,i\neq j}\{r_{ij}\} \tag{8.9}$$

称 $\tau(u_i)$为 u_i 的得分,$\rho(u_i)$为 u_i 的强度,据此可以用以下两种方式对 U 进行排序:

(1)按每个元素得分从大到小进行排序;

(2)取强度最大的元素 $\hat{u}$ 作为最优元素,再对 $U-\{\hat{u}\}$ 重复应用求 $\hat{u}$ 的方法,如此下去可得 U 的一种排序.

这种方法亦称为相似优先比方法,排序过程与前面介绍的相对比较法类似.

值得注意的是,如果每个 $u_i\in U$ 有一个权重 $w_i=w(u_i)$,并满足 $r_{ij}=\dfrac{w_i}{w_i+w_j}$,那么按方法(1)与方法(2)排序的结果与按权重大小进行排序的结果相同.

例 8.1.5　取例 8.1.4 中的 U 与 f,则可得出反演矩阵 R 为

$$R=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{8}{13}&\frac{5}{8}\\[4pt]\frac{5}{13}&\frac{1}{2}&\frac{4}{11}\\[4pt]\frac{3}{8}&\frac{7}{11}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

据此可以得出各元素的得分为

$$\tau(a)=1.73,\ \tau(b)=1.24,\ \tau(c)=1.50$$

按得分大小排序的结果是 acb;

计算强度则有

$$\rho(a)=0.61,\ \rho(b)=0.36,\ \rho(c)=0.37$$

这样 a 为最优元素. 在 $U-\{a\}=U'$中,再计算强度得

$$\rho'(b)=\frac{4}{11},\ \rho'(c)=\frac{7}{11}.$$

故 c 为 U 中的最优元素. 所以最终可得 U 的排序为 acb.

§8.2 意见集中法

本节考虑这样的问题:要求我们按照某些特性,对 n 个对象 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 进行排序,记 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$. 根据各元素的特征,给出 U 中元素的 m 种排序意见 $L_1,L_2,\cdots,L_m$,如何从这 m 个个体的优先次序出发得到群体的优先次序,从而作出决策,我们称之为集中 U 的 m 种排序意见 $L_1,L_2,\cdots,L_m$,即如何将这 m 种排序意见集中成一个总意见.

下面介绍两种常见的意见集中方法.

8.2.1 Borda 数法

对于 $L_1,L_2,\cdots,L_m$ 和 $u_j\in U$,用记号 $B_i(u_j)$表示在 L_i 中排在 u_j 后的元素个数,记

$$B(u_j)=\sum_{i=1}^{m}B_i(u_j) \tag{8.10}$$

称之为元素 u_j 的 Borda 数,即 u_j 在各个序 $L_1,L_2,\cdots,L_m$ 中得分值 $B_i(u_j)$的总和. 按照 Borda 数从大到小的顺序对 U 的元素进行排序,就得到新的排序意见,用该意见作为集中后的排序意见. 这种通过计算各元素的 Borda 数来实现排序的意见集中方法称为 Borda 数法.

例 8.2.1 设 $U=\{a,b,c,d\}$,假定有四种排序意见为

$$L_1:abcd\quad L_2:bcad\quad L_3:dabc\quad L_4:abdc$$

按 Borda 数法对这些意见进行集中.

解 通过计算可得

$$B_1(a)=3,B_2(a)=1,B_3(a)=2,B_4(a)=3,B(a)=9$$
$$B_1(b)=2,B_2(b)=3,B_3(b)=1,B_4(b)=2,B(b)=8$$
$$B_1(c)=1,B_2(c)=2,B_3(c)=0,B_4(c)=0,B(c)=3$$
$$B_1(d)=0,B_2(d)=0,B_3(d)=3,B_4(d)=1,B(d)=4$$

从而有

$$B(a) > B(b) > B(d) > B(c)$$

所以，集中后的排序意见为 $L: abdc$.

注：如果各不同意见 $L_1, L_2, \cdots, L_m$ 的重要程度不同，也可以对不同意见作加权处理，设意见 L_i 的权值为 a_i，即因素重要程度的模糊集为

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$$

其中 $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$，则加权 Borda 数为

$$B(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_i B_i(u_j) \tag{8.11}$$

然后，再按加权 Borda 数的大小对 U 中元素进行排序.

8.2.2 Blin 法

1. 求出 U 中各元素的模糊优先矩阵

对于把 U 中元素排成线性序的 m 个意见

$$L_1, L_2, \cdots, L_m$$

J. M. Blin 给出了一个 U 中的模糊关系 $\boldsymbol{R}$ 为

$$r_{jk} = \boldsymbol{R}(u_j, u_k) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} L_i(u_j, u_k)\ (j, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{8.12}$$

式中

$$L_i(u_j, u_k) = \begin{cases} 1, & \text{在 } L_i \text{ 中 } u_j \text{ 优先于 } u_k \\ 0.5, & \text{在 } L_i \text{ 中 } u_j \text{ 和 } u_k \text{ 并列} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

这里 r_{ij} 满足下列条件：

(1) $r_{jj} = 0, j = 1, 2, \cdots, n$;

(2) $r_{jk} + r_{kj} = 1, j \neq k, j, k = 1, 2, \cdots, n$.

我们称 $\boldsymbol{R}$ 为模糊优先矩阵.

2. 对 U 中元素总排序

取 $\lambda = 0.5$ 对模糊优先矩阵 $\boldsymbol{R}$ 进行截割，得截矩阵 $\boldsymbol{R}_{0.5}$. 令 M_i 表示 $\boldsymbol{R}_{0.5}$ 中第 i 行中元素为 1 的个数，并按 $M_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 的大小对 U 中元素进行排序.

注:如果对不同的意见赋予不同的权值,则 $\boldsymbol{R}$ 可以改变成赋权模糊优先矩阵,这时

$$r_{jk} = \sum_{i=1}^{m} a_i L_i(u_j, u_k) \tag{8.13}$$

其中 a_i 为意见 L_i 的权值,并且 $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$.

例 8.2.2 设 $U = \{a,b,c,d\}$,且 4 种意见分别为

$L_1: abcd$,权值为 $a_1 = 0.2$;$L_2: bcad$,权值为 $a_2 = 0.2$;$L_3: dabc$,权值为 $a_3 = 0.3$;$L_4: abdc$,权值为 $a_4 = 0.3$;

试用 Blin 法对 a,b,c,d 进行排序.

解 由式(8.13)可计算得

$$r_{ii} = 0 \quad (i = 1,2,3,4)$$

$$r_{12} = 0.8, \quad r_{13} = 0.8, \quad r_{14} = 0.7$$

$$r_{23} = 1, \quad r_{24} = 0.7, \quad r_{34} = 0.4$$

从而得赋权模糊优先矩阵为

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.8 & 0.7 \\ 0.2 & 0 & 1 & 0.7 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $\lambda = 0.5$ 截割 $\boldsymbol{R}$,得

$$\boldsymbol{R}_{0.5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

由此知,$M_1 = 3, M_2 = 2, M_3 = 0, M_4 = 1$. 于是,由 M_1, M_2, M_3, M_4 从大到小排出的线性序为 $L: abdc$.

§8.3 多目标模糊决策法

设 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 为 n 个待评价的方案所构成的集合,而 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 为对决策起重要作用的 m 个因素指标所构成的集合,则各方案可以由其相应的 m 个因素指标值所确定,设为

$$\boldsymbol{u}_j = (u_{1j}, u_{2j}, \cdots, u_{mj})^{\mathrm{T}} \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{8.14}$$

式中 u_{ij} 表示第 j 个方案的第 i 个因素指标值,称式(8.14)为方案 u_j 的因素指标向量.

把这 n 个方案的因素指标向量作为列构成因素指标矩阵为

$$\boldsymbol{u}^{*}=\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix} \tag{8.15}$$

下面介绍几种常用的多目标模糊决策方法.

8.3.1 定量指标模糊决策法

1. 加权相对偏差距离最小法

(1)构造相对偏差矩阵

当式(8.15)中各因素指标值 u_{ij}为定量指标时,令

$$\delta_{ij}=\frac{\left|u_i^0-u_{ij}\right|}{u_{i\max}-u_{i\min}} \quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \tag{8.16}$$

式中

$$u_{i\max}=\max\{u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{in}\},\ u_{i\min}=\min\{u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{in}\}$$

$$u_i^0=\begin{cases} u_{i\max}, \text{当因素指标 } v_i \text{ 为正指标时} \\ u_{i\min}, \text{当因素指标 } v_i \text{ 为负指标时} \end{cases}$$

这里正指标是指因素指标值越大方案越优的因素指标,负指标是指因素指标值越小方案越优的因素指标,例如产值因素指标为正指标,而能源消耗因素指标为负指标,称 δ_{ij}为相对偏差值,称 u_i^0 为标准值,而称 $\boldsymbol{u}^0=(u_1^0,u_2^0,\cdots,u_m^0)$为标准值向量.

由上述 $m\times n$ 个相对偏差值 δ_{ij}作为元素构成一个模糊矩阵

$$\boldsymbol{\Delta}=\begin{pmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{m1} & \cdots & \delta_{mn} \end{pmatrix}$$

称矩阵 $\boldsymbol{\Delta}$ 为相对偏差矩阵.

(2)确定因素重要程度模糊集

利用 Delphi 法,由专家评定出各影响因素 $v_i(i=1,2,\cdots,m)$的权重系数 a_i,即确定出因素重要程度模糊集:$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$.

(3)对各方案进行决策

计算 u_j 与 u^0 的加权相对偏差距离

$$d_j=d_j(u_j,u^0)=\frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{m}(a_i\cdot\delta_{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

式中 $a=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a_i$ 为 m 项指标权值的平均值. 把由 n 个方案中的 m 个因素指标的标准值向量 $\boldsymbol{u}^0=(u_1^0,u_2^0,\cdots,u_m^0)$构成的方案,拟定为最理想的方案. 这样 n 个评价

方案中与最理想方案之间加权相对偏差距离 d_j 最小者相对应的方案 u_i 应被选为最优方案，即当

$$d_i = d_i(u_i, u^0) = \min\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$$

时，方案 u_i 为最优方案.

2. 定量指标综合决策法

(1)构造模糊评价矩阵

令

$$r_{ij} = \begin{cases} 0.1 + \dfrac{u_{i\max} - u_{ij}}{d}, \text{当 } v_i \text{ 为正指标时} \\ 0.1 + \dfrac{u_{ij} - u_{i\max}}{d}, \text{当 } v_i \text{ 为负指标时} \end{cases} \tag{8.17}$$

式中 d 表示级差值，即

$$d = \frac{u_{i\max} - u_{i\min}}{1 - 0.1}$$

r_{ij}表示第 i 项因素对第 j 个方案的评价值.

以上述 $m \times n$ 个评价值作为元素构成模糊评价矩阵为

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

(2)确定因素重要程度模糊集

利用 Delphi 法，由专家评定出各影响因素 $v_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的权重系数 a_i，即确定出因素重要程度模糊集：$A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$.

(3)对各方案进行决策

利用加权平均模型 $M(\cdot, +)$，对各方案进行评价：

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{R} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

其中
$$b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot r_{ij}, \ j = 1, 2, \cdots, n.$$

根据最大隶属度原则，与 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$ 中的最大者相对应的方案为最优方案.

例 8.3.1 考虑某工程投资项目的决策问题，已知有 4 个投资方案，记为

$$U = \{\text{方案 } 1, \text{方案 } 2, \text{方案 } 3, \text{方案 } 4\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}.$$

各个方案选用 10 个因素指标，记为

$$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_{10}\}.$$

设各方案的因素指标矩阵为

$$u^* = \begin{bmatrix} 3654.5 & 4054.5 & 3560.4 & 3730.2 \\ 24000 & 26712 & 23350 & 25200 \\ 430.0 & 218.4 & 234.0 & 403.5 \\ 5270 & 3515 & 4163.3 & 5638.9 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 213.6 & 302.8 & 215.3 & 239.2 \\ 0.1 & 0.1 & 190 & 150 \\ 8 & 9.5 & 8 & 9 \\ 197.5 & 185.2 & 189.7 & 190.1 \\ 980 & 1062 & 1500 & 2871 \end{bmatrix}$$

经专家评定,各因素指标的重要程度模糊集为

$$A = (0.57, 1, 0.54, 0.41, 0.82, 0.97, 0.58, 0.44, 0.36, 0.1)$$

试对各投资方案进行模糊决策.

解 因所给的因素指标是定量指标,我们分别采用加权相对偏差距离最小法和定量指标综合决策法进行决策.

(1)应用加权相对偏差距离最小法进行决策. 根据因素指标矩阵 u^*,可得各因素指标的标准值向量为

$$u^0 = (u_1^0, u_2^0, \cdots, u_{10}^0) = (3560.4, 23350, 218.4, 3515.4, 1, 213.6, 0.1, 8, 185.2, 980)$$

把 u^* 及 u^0 代入式(8.16)得相对偏差模糊矩阵为

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0.19 & 1 & 0 & 0.34 \\ 0.19 & 1 & 0 & 0.55 \\ 1 & 0 & 0.07 & 0.87 \\ 0.83 & 0 & 0.31 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.02 & 0.29 \\ 0 & 0 & 1 & 0.79 \\ 0 & 1 & 0 & 0.67 \\ 1 & 0 & 0.37 & 0.40 \\ 0 & 0.04 & 0.27 & 1 \end{bmatrix}$$

例如

$$\delta_{23} = \frac{|u_2^0 - u_{23}|}{u_{2\max} - u_{2\min}} = \frac{|23350 - 23350|}{26712 - 23350} = 0$$

$$\delta_{64} = \frac{|u_6^0 - u_{64}|}{u_{6\max} - u_{6\min}} = \frac{|213.6 - 239.2|}{302.8 - 213.6} = 0.29$$

其余的类似可得.

根据加权相对偏差距离公式可得

$$d_1 = d_1(u_1, u^0) = \frac{1}{a}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i\delta_{i1})^2} = 1.937$$

$$d_2 = d_2(u_2, u^0) = \frac{1}{a}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i\delta_{i2})^2} = 2.709$$

$$d_3 = d_3(u_3, u^0) = \frac{1}{a}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i\delta_{i3})^2} = 1.054$$

$$d_4 = d_4(u_4, u^0) = \frac{1}{a}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i\delta_{i4})^2} = 2.323$$

由于 $d_3 = \min\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$，故由加权相对偏差距离最小法知 d_3 所对应的方案 3 为最优方案.

（2）应用定量指标综合决策法进行决策可得模糊评价矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} 0.83 & 0.10 & 1 & 0.69 \\ 0.83 & 0.10 & 1 & 0.50 \\ 0.10 & 1 & 0.93 & 0.21 \\ 0.26 & 1 & 0.73 & 0.10 \\ 0.10 & 1 & 1 & 0.10 \\ 1 & 0.10 & 0.98 & 0.74 \\ 1 & 1 & 0.10 & 0.29 \\ 1 & 0.10 & 1 & 0.40 \\ 0.10 & 1 & 0.67 & 0.64 \\ 1 & 0.96 & 0.75 & 0.10 \end{bmatrix}$$

例如 $r_{63} = 0.1 + \frac{u_{6\max} - u_{63}}{d} = 0.1 + \frac{302.8 - 215.3}{99.1} = 0.98$.

为了应用加权平均模型 $M(\cdot, +)$ 对各方案进行评价，我们首先将所给的因素指标重要程度模糊集 A 归一化，得

$A_1 = (0.10, 0.17, 0.09, 0.07, 0.14, 0.17, 0.10, 0.08, 0.06, 0.02)$

于是，得模糊综合评价集为

$B = A_1 \cdot \boldsymbol{R} = (b_1, b_2, b_3, b_4) = (0.64, 0.53, 0.86, 0.42)$

由于 $b_3 = \max\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$，故由最大隶属度原则知 b_3 所对应的方案 3 为最优方案，这与应用加权相对偏差距离最小法的决策结果一致.

8.3.2 定性指标模糊决策法

当式(8.15)中各因素指标值 u_{ij} 为定性指标时，模糊评价矩阵 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{m\times n}$ 由专家评议确定. 具体方法如下：

1. 五级划分法.

(1)$U=$(优,良,中,差,劣),见图8.1.

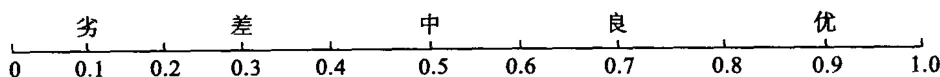


图8.1 定性指标五级划分

当因素指标为“优”时,评定值为0.9;当因素指标为“良”时,评定值为0.7;当因素指标为“中”时,评定值为0.5;当因素指标为“差”时,评定值为0.3;当因素指标为“劣”时,评定值为0.1;当因素指标介于两个等级之间时,评定值取这两个等级评定值之间的值.

(2)$U=$(最优,优,良,中,劣),见图8.2.

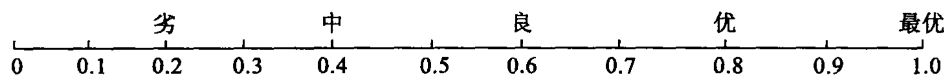


图8.2 定性指标五级划分

这类划分的因素指标评定值的确定方法类似于上述的说明.

2. 九级划分法.

$U=$(最好,很好,好,较好,中,较差,差,很差,最差),见图8.3.

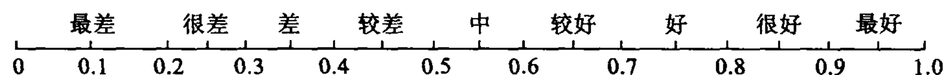


图8.3 定性指标九级划分

当因素指标为“最好”时,评定值为0.95;当因素指标为“很好”时,评定值为0.85;当因素指标为“好”时,评定值为0.75;当因素指标为“较好”时,评定值为0.65;当因素指标为“中”时,评定值为0.55;当因素指标为“较差”时,评定值为0.45;当因素指标为“差”时,评定值为0.35;当因素指标为“很差”时,评定值为0.25;当因素指标为“最差”时,评定值为0.1;而当因素指标介于两个等级之间时,评定值取这两个等级评定值之间的值.

3. 按上述方法确定的评定值构造模糊评价矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$.

4. 利用Delphi法确定因素重要程度模糊集 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

5. 应用加权平均模型 $M(\cdot,+)$,对各方案进行评价,得模糊综合评价集为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R}=(b_1,b_2,\cdots,b_n).$$

按最大隶属度原则,与 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$ 中的最大者相对应的方案为最优方案.

注:在具体决策问题中,如果因素指标既有定量的,也有定性的,则可以同时使用上述两种方法.如果因素指标之间具有多层次之分,则可以采用多层次综合评判法,对问题进行决策.

习 题 8

1. 设 $U=\{a,b,c\}$,其中,a,b,c 表示甲、乙、丙三人.下面对他们的身高进行排序,通过两两比较,得到如下优先关系矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0 & 0.1 \\ 0.7 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$$

试按优先关系定序法对 U 中的元素进行排序.

2. 设 $U=\{a,b,c,d,e\}$,现有五个专家对 U 中元素的排序分别为:

$$L_1: aedbc \quad L_2: adecb \quad L_3: deacb \quad L_4: daebc \quad L_5: abcde$$

试分别用 Borda 数法、Blin 法对这些排序意见进行集中.

3. 设 $U=\{a,b,c,d\}$,现有三个专家对 U 中元素的排序分别为

$$L_1: abcd \text{ 取权值 } a_1=0.3$$

$$L_2: bdac \text{ 取权值 } a_2=0.4$$

$$L_3: dabc \text{ 取权值 } a_3=0.3$$

试用 Blin 法对这些排序意见进行集中.

4. 考虑某企业投资项目的决策问题,已知有 3 个备选方案,记为 $U=\{u_1,u_2,u_3\}$,各个方案选用 8 个因素指标,记为 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_8\}$.

设各方案的因素指标矩阵为

$$u^*=\begin{bmatrix} 1200 & 1150 & 1000 \\ 0.85 & 0.86 & 0.82 \\ 1.50 & 1.20 & 1.20 \\ 3500 & 3400 & 3000 \\ 820 & 800 & 750 \\ 200 & 180 & 170 \\ 0.56 & 0.52 & 0.55 \\ 980 & 985 & 990 \end{bmatrix}$$

经专家调查可得各因素指标的重要程度模糊集为

$$A=(0.43,0.56,0.85,0.48,0.52,0.68,0.82,0.64).$$

试分别用加权相对偏差距离最小法和定量指标综合决策法对各方案进行模糊决策.

第 9 章　模糊线性规划

在一定约束条件下求目标函数的极值问题称为数学规划问题. 普通规划问题的约束条件和目标函数都是确定的. 然而,在实际问题中不论目标函数还是约束条件都具有不同程度的不确定性. 这样就要用模糊集的工具对这类问题进行数学处理,所建立的数学模型就是模糊规划. 本章将介绍模糊规划问题的基本概念和几种最优化解法.

§9.1　模糊约束条件下的极值问题

9.1.1　模糊极大集

定义 9.1.1　设 U 是论域,$A\subseteq U$, $f:\ A\to R$ 为 U 上的一个有界实值函数,令

$$M = \{x^* \mid f(x^*) = \max_{x\in A} f(x)\} \tag{9.1}$$

称 M 为 f 在 A 上的条件优越集,并称 $y^* = f(x^*)$, $x^*\in M$, 为 f 在 A 上的条件极大值.

如果 A 是模糊集时,如何确定函数 f 在模糊集 A 上的条件极值? 为此,首先引入 f 的极大值的概念.

定义 9.1.2　设 $f: U\to\mathbf{R}$ 为论域 U 的一个有界实值函数,引入 $M_f\in F(U)$,且

$$M_f(x) = \frac{f(x) - \min\limits_{y\in U} f(y)}{\max\limits_{y\in U} f(y) - \min\limits_{y\in U} f(y)},\ \forall x\in U \tag{9.2}$$

称 M_f 为 f 的无条件模糊优越集,并称 $f(M_f)\in F(R)$ 为 f 的无条件模糊极大值. 其中

$$f(M_f)(y) = \sup_{f(x)=y} M_f(x),\ \forall y\in\mathbf{R}. \tag{9.3}$$

易见,当 $f(x_1) = \max\limits_{x\in A} f(x)$ 时,$M_f(x_1) = 1$;当 $f(x_2) = \min\limits_{x\in A} f(x)$ 时,$M_f(x_2) = 0$;当 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 时,$M_f(x_1)\geqslant M_f(x_2)$. 因此,$M_f$ 反映了在模糊的意义下, x 的优越程度.

又当 $y_1 = \max\limits_{x\in A} f(x)$ 时, $f(M_f)(y_1) = \sup\limits_{f(x)=y_1} M_f(x) = 1$;当 $y_2 = \min\limits_{x\in A} f(x)$ 时, $f(M_f)(y_2) = \sup\limits_{f(x)=y_2} M_f(x) = 0$;当 $y\notin f(X)$ 时, $f(M_f)(y) = 0$. 因此, $f(M_f)(y)$ 反映

了在模糊意义下，y 对 f 的模糊极大值的隶属程度.

9.1.2 对称型的模糊条件极值

定义 9.1.3 设 U 是论域，$A\in F(U)$，U 中满足条件

$$M_f(x^*) = \sup_{x\in U} M_f(x) \wedge A(x) \tag{9.4}$$

的点 x^* 称为 f 在模糊约束 A 下的模糊条件极大点，$f(x^*)$ 称为 f 在 A 下的模糊条件极大值.

由于定义 9.1.3 把目标函数 f 和模糊约束 A 同等对待，故通常把这种求解目标函数 $f(x)$ 在模糊约束 A 下的条件极值的规划问题称为对称型模糊规划问题. 其求解方法如下：

(1) 压缩映射，即求 f 的模糊极大集 M_f；

(2) 模糊判决，即求 $A_f=M_f\cap A$；

(3) 确定判决，即选择 x^*，使 $A_f(x^*)=\sup\limits_{x\in U}A_f(x)$.

下面举例具体说明上述求解过程.

例 9.1.1 在研究某药物对一种疾病的疗效时，得到如下事实，在一定量的药物中加入成分 W 的重量服从正态分布时，药物的疗效为

$$y=f(x)=e^{-(x-2)^2}\quad(\%)$$

但成分 W 对人的肝、肾有副作用，故加入 W 的重量应受到约束，该约束为一个模糊集 A，其隶属函数为

$$A(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ e^{-(x-1)^2}, & x>1\end{cases}$$

若要使该药物对疾病的疗效显著，且对人体的影响最小，试问怎样确定加入成分 W 的重量？

解 根据题意，这是求目标函数 $f(x)$ 在模糊约束 A 下的条件极大点的对称型模糊规划问题.

(1) 压缩映射. 由 $y=f(x)$ 的表达式可知 $\max f=1$，$\min f=0$，从而由式(9.2)知 M_f 的隶属函数为

$$M_f(x)=e^{-(x-2)^2},\quad \forall x\in\mathbf{R}_+.$$

(2) 模糊判决.

$$A_f(x)=(M_f\cap A)(x)=\begin{cases}e^{-(x-2)^2}, & 0\leqslant x\leqslant x_0,\\ e^{-(x-1)^2}, & x>x_0.\end{cases}$$

其中 x_0 为 $M_f(x)$ 与 $A(x)$ 的交点. 令 $M_f(x)=A(x)$ 得

$$e^{-(x-2)^2}=e^{-(x-1)^2}$$

即

$$(x-2)^2=(x-1)^2$$

解之得 $x_0=1.5$.

(3)确定判决. 因为

$$\sup_{x\in U} A_f(x)=A_f(1.5)=e^{-0.25}\approx 0.7788=77.88\%$$

所以,由最大隶属度原则知,加入 1.5 个重量单位的成分 W,疗效最佳且对人体的影响最小.

9.1.3　非对称型的模糊条件极值

如果把目标和约束看成不同等重要的,可以用加权的方法. 这就是所谓的非对称型模糊规划.

设 $\omega\in[0,1]$,记

$$A_f(x)=\omega M_f(x)+(1-\omega)A(x),\ \forall x\in U$$

其中,ω 为 M_f 的权重,$1-\omega$ 为 A 的权重. 若 $x^*\in U$ 满足 $A_f(x^*)=\sup\limits_{x\in U}A_f(x)$,则称点 x^* 为加权型的模糊条件极大点,$f(x^*)$称为加权型的模糊条件极大值.

对于多约束 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的情况,可以采用

$$A(x)=g(A_1(x),A_2(x),\cdots,A_n(x))$$

对于多目标 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 的情况,先求出模糊目标集 $M_{f_1},M_{f_2},\cdots,M_{f_m}$,再采用

$$M_f(x)=h(M_{f_1}(x),M_{f_2}(x),\cdots,M_{f_m}(x))$$

其中,g、h 都是综合评判函数,然后,对 A 和 M_f 使用上面的模型.

§9.2　模糊线性规划

所谓模糊线性规划是指目标函数为线性的,而约束条件为"近线性的"模糊规划问题. 本节介绍解模糊线性规划问题的基本步骤与方法.

普通线性规划的标准形式为

$$\max\quad Z=\boldsymbol{cx} \tag{9.5}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{9.6}$$

其通常的解法是单纯形法,当变量数目 $n=2$ 时也可以用图解法. 然而,在实际问题中,有时约束条件可能带有弹性;有时目标函数可能不止一个,要同时使几个目标函数都达到最大往往不可能,这就需要提出某种折中方案,使各目标相对地"极大". 这些过程可以采用模糊集的方法进行.

德国模糊系统专家 H. J. Zimmermann 首先讨论了模糊线性规划,他将线性规划(单目标或多目标)中约束条件或目标函数模糊化,引进隶属函数,从而导出一个新的线性规划问题,新问题的最优解称为原问题的模糊最优解. 下面介绍单目标

线性规划的解法.

先求出线性规划问题(9.5)、(9.6)的最优值 Z_0,然后把约束条件(9.6)模糊化,写成

$$\begin{cases} Ax \lesssim b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.7}$$

其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T, c=(c_1,c_2,\cdots,c_m)^T$
“$\lesssim$”表示一种弹性约束,读作“近似小于或等于”,式(9.7)由 m 个近似不等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \lesssim b_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

组成. 设

$$U=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x\in \mathbf{R}^n, x\geqslant 0\}$$

对每个 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \lesssim b$,对应地有 U 中的一个模糊子集 D_i, 其隶属函数如下

$$D_i(x)=f_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)=\begin{cases} 1, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \\ 1-\dfrac{1}{d_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right), & b_i < \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i+d_i \quad i=1,2,\cdots,m \\ 0, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i+d_i \end{cases}$$

这里 $d_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$是适当选择的伸缩指标. 若记 $y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$,则 $f_i(y_i)$ 的图像如图 9.1 所示.

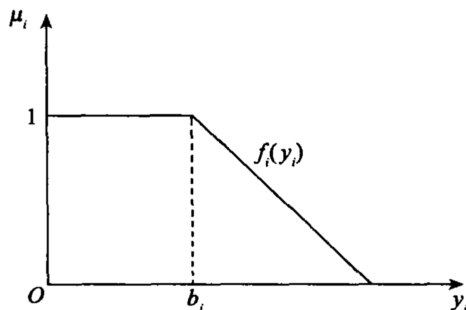


图 9.1 $f_i(y_i)$的图像

令 $D=D_1\cap D_2\cap\cdots\cap D_m$,于是 D 可以代表式(9.7)的模糊约束集, $D\in F(U)$. 特别地,当每个 $d_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$时,D 就退化为普通的约束集.

为了求得目标函数(9.5)在模糊约束(9.7)下的最优解,需将目标函数(9.5)

转化成模糊约束条件

$$cx \gtrsim Z_0$$

对应地应在 U 中有一个模糊子集 F(F 是模糊目标集),其隶属函数可以取为

$$F(\boldsymbol{x}) = g\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) = \begin{cases} 0, & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant z_0 \\ \dfrac{1}{d_0}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - z_0\right), & z_0 < \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant z_0 + d_0 \\ 1, & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j > z_0 + d_0. \end{cases}$$

其中, $z_0 + d_0$ 是在式(9.6)中把 b_i 换成 $b_i + d_i$ 后的线性规划的最优值(这样,d_0 是一个确定的数). 记 $y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$,则 $g(y_0)$ 的图像如图 9.2 所示.

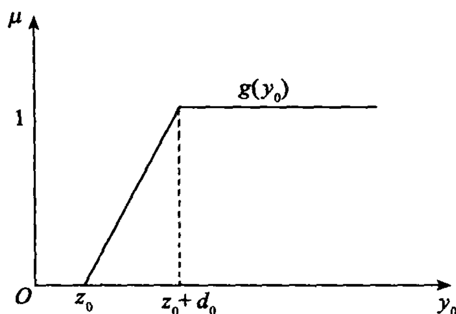


图 9.2　$g(y_0)$的图像

为了兼顾模糊约束集 D 和模糊目标集 F,可以采用 $B = D \cap F$ 作为模糊判决集,再利用最大隶属度原则求 $\boldsymbol{x}^*$,使 $B(\boldsymbol{x}^*) = \sup\limits_{x \in U} D(\boldsymbol{x}) \wedge F(\boldsymbol{x})$. 则 $\boldsymbol{x}^*$ 就是目标函数在模糊约束下的最优解,而 $Z^* = c\boldsymbol{x}^*$ 就是目标函数的最优值.

为了求解模糊线性规划问题的最优解,我们首先将模糊线性规划问题转化为普通的线性规划问题,具体方法如下.

令 $\lambda = D(\boldsymbol{x}) \wedge F(\boldsymbol{x})$,则求 $\boldsymbol{x}^*$ 的问题转化为求解如下线性规划问题

$$\begin{cases} \max(\lambda) \\ 1 - \dfrac{1}{d_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) \geqslant \lambda, (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \dfrac{1}{d_0}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - z_0\right) \geqslant \lambda \\ \lambda \geqslant 0, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.8}$$

用单纯形法解式(9.8)可得最优解 $\lambda^*, x_1, x_2, \cdots, x_n$，令

$$x^* = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

则显然有 $B(x^*) = \sup\limits_{x \in U} D(x) \wedge F(x) = \lambda^*$，所以 x^* 即为所求的模糊条件极大点，即目标函数(9.5)在模糊约束(9.7)下的最优解.

下面举例具体说明上述求解过程.

例 9.2.1 求解下面的模糊线性规划

$$\max Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \lesssim 5 \\ -x_1 + x_2 \lesssim 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \lesssim 21 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 首先由单纯形法解得相应的普通线性规划

$$\max Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

的最优解和最优值为

$$x^{(1)} = \frac{11}{4}, \quad x_2^{(1)} = \frac{9}{4}, \quad Z_0 = \frac{31}{4}$$

根据各目标重要性程度不同，主观地给出伸缩性指标为 $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3$，对应地得到三个模糊目标集 D_1, D_2, D_3，它们的隶属函数分别为

$$D_1(x) = f_1(x_1 + x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ 1 - \frac{1}{1}(x_1 + x_2 - 5), & 5 < x_1 + x_2 \leqslant 5 + 1 \\ 0, & x_1 + x_2 > 5 + 1 \end{cases}$$

$$D_2(x) = f_2(-x_1 + x_2) = \begin{cases} 1, & -x_1 + x_2 \leqslant 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(-x_1 + x_2), & 0 < -x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ 0, & -x_1 + x_2 > 2 \end{cases}$$

$$D_3(x) = f_3(6x_1 + 2x_2) = \begin{cases} 1, & 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 \\ 1 - \frac{1}{3}(6x_1 + 2x_2 - 21), & 21 < 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 + 3 \\ 0, & 6x_1 + 2x_2 > 21 + 3 \end{cases}$$

为求 d_0，需解以下的线性规划问题

$$\max Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

仍用单纯形法解之得最大值为 $Z_0 + d_0 = 9$，因此，$d_0 = 9 - Z_0 = 9 - \frac{31}{4} = \frac{5}{4}$.

将目标函数转化为模糊约束条件 $2x_1 + x_2 \gtrsim \frac{31}{4}$，对应的模糊目标集 F 的隶属函数为

$$F(x) = g(2x_1 + x_2) = \begin{cases} 0, & 2x_1 + x_2 \leqslant \frac{31}{4} \\ \frac{4}{5}\left(2x_1 + x_2 - \frac{31}{4}\right), & \frac{31}{4} < 2x_1 + x_2 \leqslant 9 \\ 1, & 2x_1 + x_2 > 9 \end{cases}$$

令 $C = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap F$，为了求 $C(\boldsymbol{x}^*) = \sup\limits_{x \in U} C(\boldsymbol{x}) = \sup\limits_{x \in U} (D_1(\boldsymbol{x}) \wedge D_2(\boldsymbol{x}) \wedge D_3(\boldsymbol{x}) \wedge F(\boldsymbol{x}))$，根据式(9.8)，可以转化为求下列普通线性规划问题

$$\begin{cases} \max(\lambda) \\ 1 - (x_1 + x_2 - 5) \geqslant \lambda \\ 1 - \frac{1}{2}(-x_1 + x_2) \geqslant \lambda \\ 1 - \frac{1}{3}(6x_1 + 2x_2 - 21) \geqslant \lambda \\ \frac{4}{5}\left(2x_1 + x_2 - \frac{31}{4}\right) \geqslant \lambda \\ \lambda \geqslant 0, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法解上述线性规划问题，得最优解为

$$x_1^* = \frac{23}{8}, \quad x_2^* = \frac{21}{8}, \quad \lambda^* = \frac{1}{2}$$

从而对应的目标函数的最优值为 $Z^* = 2x_1^* + x_2^* = \frac{67}{8}$.

§9.3　多目标模糊线性规划

在解决实际问题时，常常会遇到多个目标函数的线性规划问题. 一般来说，要同时使多个目标函数都达到最优值往往是困难的，这就需要用某种折中的方法来处理，使每个目标函数都达到最优值. 本节介绍由德国模糊系统专家 H. J. Zimmer-

mann 提出的一种将多目标函数模糊化的方法.

考虑多目标线性规划问题

$$\max \quad \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{9.9}$$

其中 $\boldsymbol{Z}=(Z_1,Z_2,\cdots,Z_r)^{\mathrm{T}}$,而 $Z_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{im}x_m(i=1,2,\cdots,r)$.

首先求单目标函数 Z_i 在式(9.9)中约束条件下的最优值

$$Z_i^* = \max\{Z_i \mid Z_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}(i = 1,2,\cdots,r).$$

对每个最优值 $Z_i^*(i=1,2,\cdots,r)$,适当给出一个反映各目标重要性程度的伸缩性指标 $d_i(d_i>0)$,d_i 愈小,目标函数 Z_i 就愈重要. 相应地可以得到一个模糊目标集 F_i,其隶属函数可以取为

$$F_i(\boldsymbol{x}) = g_i\left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j\right) = \begin{cases} 0, & \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j < Z_i^* - d_i \\ 1 - \dfrac{1}{d_i}\left(Z_i - \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j\right), & Z_i^* - d_i \leqslant \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j < Z_i^* \\ 1, & \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j \geqslant Z_i^* \end{cases}$$

令 $F = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_r$, $U = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ 则 F 是对应于多目标函数 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ 模糊化后的模糊目标集,U 是对应于约束条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的约束集,这里 U 是一个经典集合.

再利用最大隶属度原则求 $\boldsymbol{x}^*$,使 $F(\boldsymbol{x}^*) = \sup\limits_{x \in U} F(\boldsymbol{x})$. 则 $\boldsymbol{x}^*$ 就是目标函数在模糊约束下的最优解,而 $\boldsymbol{Z}^* = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*$ 就是目标函数的最优值. 由此可以导出一个新的普通线性规划问题为

$$\begin{cases} \max(\lambda) \\ 1 - \dfrac{1}{d_i}\left(Z_i^* - \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j\right) \geqslant \lambda, \quad (i = 1,2,\cdots,r) \\ \sum_{j=1}^{m} c_{kj}x_j \leqslant b_k, \quad (k = 1,2,\cdots,n) \\ \lambda \geqslant 0, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_m \geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法解可以求出上述线性规划问题的最优解为 $\lambda^*, x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*$,令

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{Z}^{**} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^* = \left(\sum_{j=1}^{m} c_{1j}x_j^*, \sum_{j=1}^{m} c_{2j}x_j^*, \cdots, \sum_{j=1}^{m} c_{rj}x_j^*\right)$$

则 $\boldsymbol{x}^*$ 就是多目标线性规划问题的模糊最优解,其隶属度为 $\boldsymbol{\lambda}^*$,而 $\boldsymbol{Z}^{**}$ 就是式(9.9)的最优值.

下面举例具体说明上述求解过程.

例 9.3.1 求解多目标线性规划问题

$$\max\begin{cases} Z_1 = 3x_1 + 11x_2 \\ Z_2 = 8x_1 + 8x_2 \\ Z_3 = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -8x_1 + 11x_2 \leqslant 143 \\ 8x_1 + 11x_2 \leqslant 319 \\ 13x_1 + 5x_2 \leqslant 351 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 首先用单纯形法求出式中每个目标函数在约束条件下的最优解和最优值

$$x_1^{(1)} = 11,\quad x_2^{(1)} = 21,\quad Z_1^* = 264$$
$$x_1^{(2)} = 22,\quad x_2^{(2)} = 13,\quad Z_2^* = 280$$
$$x_1^{(3)} = 27,\quad x_2^{(3)} = 0,\quad Z_3^* = 270$$

根据各目标重要性程度不同,主观地给出伸缩性指标为 $d_1 = 85, d_2 = 45, d_3 = 70$,对应地得到三个模糊目标集 F_1, F_2, F_3,它们的隶属函数分别为

$$F_1(x) = g_1(3x_1 + 11x_2) = \begin{cases} 0, & 3x_1 + 11x_2 < 264 - 85 = 179 \\ 1 - \frac{1}{85}(264 - 3x_1 - 11x_2), & 179 \leqslant 3x_1 + 11x_2 < 264 \\ 1, & 3x_1 + 11x_2 \geqslant 264 \end{cases}$$

$$F_2(x) = g_2(8x_1 + 8x_2) = \begin{cases} 0, & 8x_1 + 8x_2 < 280 - 45 = 235 \\ 1 - \frac{1}{45}(280 - 8x_1 - 8x_2), & 235 \leqslant 8x_1 + 8x_2 < 280 \\ 1, & 8x_1 + 8x_2 \geqslant 280 \end{cases}$$

$$F_3(x) = g_3(10x_1 + x_2) = \begin{cases} 0, & 10x_1 + x_2 < 270 - 70 = 200 \\ 1 - \frac{1}{70}(270 - 10x_1 - x_2), & 200 \leqslant 10x_1 + x_2 < 270 \\ 1, & 10x_1 + x_2 \geqslant 270 \end{cases}$$

令 $F = F_1 \cap F_2 \cap F_3$, $\lambda = F_1(x) \wedge F_2(x) \wedge F_3(x)$,设 $x^* \in U$ 满足

$$F(x^*) = \sup_{x \in U} F(x) = \sup_{x \in U}(F_1(x) \wedge F_2(x) \wedge F_3(x))$$

则求 x^* 的问题归结为如下线性规划问题

$$\begin{cases}\max(\lambda)\\ 1-\dfrac{1}{85}(264-3x_1-11x_2)\geqslant\lambda\\ 1-\dfrac{1}{45}(280-8x_1-8x_2)\geqslant\lambda\\ 1-\dfrac{1}{70}(270-10x_1-x_2)\geqslant\lambda\\ -8x_1+11x_2\leqslant 143\\ 8x_1+11x_2\leqslant 319\\ 13x_1+5x_2\leqslant 351\\ \lambda\geqslant 0,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

用单纯形法解上述线性规划问题，得最优解为 $x_1^*=22,x_2^*=13,\lambda^*=0.353$，从而得原线性规划问题的模糊最优解为 $\boldsymbol{x}^*=(22,13)^{\mathrm{T}}$，而 $\boldsymbol{x}^*$ 隶属于 F 的隶属度为 $\lambda^*=0.353$，对应的多目标函数的最优值为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}^{**}&=(Z_1^{**},Z_2^{**},Z_3^{**})^{\mathrm{T}}\\&=(c_{11}x_1^*+c_{12}x_2^*,c_{21}x_1^*+c_{22}x_2^*,c_{31}x_1^*+c_{32}x_2^*)^{\mathrm{T}}\\&=(3\times 22+11\times 13,8\times 22+8\times 13,10\times 22+13)^{\mathrm{T}}=(209,280,133)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

即 $Z_1^{**}=209,Z_2^{**}=280,Z_3^{**}=233$.

§9.4 有模糊系数的线性规划

前面介绍了单目标与多目标带有模糊约束条件的线性规划问题. 本节考虑约束条件中带有模糊系数以及目标函数中带有模糊系数的规划问题. 为此，首先引进 $L-R$ 型模糊数及其运算.

9.4.1 $L-R$ 型模糊数及其运算

若实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数 L 满足：$L(0)=1,L(x)=L(-x)$，L 在 $[0,+\infty)$ 中单调递减，则称 L 为参考函数. 常用的参考函数有：

(1) $L(x)=\max\{0,1-|x|^p\}=\begin{cases}1-x^p, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1-(-x)^p, & -1\leqslant x<0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

其中，$p>0$，常取 $p=\dfrac{1}{2},1,2$ 等.

(2) $L(x)=\mathrm{e}^{-|x|^p}$，其中，$p>0$，常取 $p=2$.

(3) $L(x)=\frac{1}{1+|x|^{p}}$,其中,$p>0$,常取 $p=1,2,3$ 等.

(4) $L(x)=\begin{cases}1, x\in[-p,p]\\0,\text{其他}\end{cases}$,其中,$p\geqslant 0$,当 $p=0$ 时,$L(x)$称为点态函数.

若 $A\in F(R)$,$\forall x,y,z\in\mathbf{R}$ 且 $x<y<z$ 有

$$A(y)\geqslant\min\{A(x),A(z)\}$$

则称 A 是凸模糊集. 称 $\mathbf{R}$ 上的一个凸的正规模糊集为模糊数. 一个模糊数 M 称为 $L-R$ 型模糊数,简称 $L-R$ 数,如果

$$M(x)=\begin{cases}L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & x\leqslant m,\alpha>0\\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & x\geqslant m,\beta>0\end{cases}$$

其中,L,R 都是参考函数,称 L 为左枝,R 为右枝. m 为主值,α,β 分别为左、右展形. $L-R$ 数可简记为 $M=(m,\alpha,\beta)_{LR}$. 约定 $\alpha=0$ (或 $\beta=0$)时,L(或 R)取点态函数,于是普通实数 m 是左、右展形均为 0 的 $L-R$ 数,即 $m=(m,0,0)_{LR}$.

对于 $L-R$ 数,其运算规定如下.

设 $M=(m,\alpha,\beta)_{LR}$,$N=(n,\gamma,\delta)_{LR}$,$P=(n,\gamma,\delta)_{RL}$,则定义

(1)加法 $M+N=(m+n,\alpha+\gamma,\beta+\delta)_{LR}$;

(2)纯量乘法 设 λ 是一个实数,

$$\lambda M=\begin{cases}(\lambda m,\lambda\alpha,\lambda\beta)_{LR}, & \lambda>0\\(\lambda m,-\lambda\alpha,-\lambda\beta)_{LR}, & \lambda<0\end{cases};$$

(3)减法 $M-P=M+(-P)=(m-n,\alpha+\gamma,\beta+\delta)_{LR}$;

(4)乘法 $M\cdot N\approx(mn,m\gamma+n\alpha,m\delta+n\beta)_{LR}$,其中"$\approx$"表示近似等于,下同;

(5) 除法$\frac{M}{P}\approx\left(\frac{m}{n},\frac{\delta m+\alpha n}{n^2},\frac{\gamma m+\beta m}{n^2}\right)_{LR}$,其中,$n\neq 0$;

(6)$\widetilde{\max},\widetilde{\min}$ $\widetilde{\max}(M,N)=(m\vee n,a\wedge\gamma,\beta\vee\delta)$,

$$\widetilde{\min}(M,N)=(m\wedge n,a\vee\gamma,\beta\wedge\delta);$$

(7)$\leqslant,\subseteq$ $M\leqslant N\Leftrightarrow m\leqslant n,\alpha\geqslant\gamma,\beta\leqslant\delta$;$M\subseteq N\Leftrightarrow m+\beta\leqslant n-\delta$ 或 $M=N$.

以下为方便计,将 $L-R$ 数记为$\widetilde{m}=(m,\underline{m},\overline{m})$. 一个矩阵,若每个元素都是 $L-R$ 数,称该矩阵为 $L-R$ 矩阵,记为$\widetilde{A}=(\widetilde{a}_{ij})$. 有关普通矩阵的记号、运算及顺序的规定都可以推广到 $L-R$ 矩阵上来. 借助这些概念,可以讨论带有模糊系数的线性规划问题.

9.4.2 约束带有模糊系数的线性规划模型

考察如下问题

$$\max \quad Z = cx$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \widetilde{A}x \leqslant \widetilde{b} \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.10}$$

其中$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{m \times n}$为 $L-R$ 矩阵,$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,$\widetilde{c} = (\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \cdots, \widetilde{c}_n)^{\mathrm{T}}$,$\widetilde{b} = (\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \cdots, \widetilde{b}_m)^{\mathrm{T}}$均为 $L-R$ 向量.

由于 $x \geqslant 0$,按纯量乘法定义,$\widetilde{G}_{ij}x_j$ 也是 $L-R$ 数,由$\widetilde{a}_{ij} = (a_{ij}, \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij})_{LR}$可知

$$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}x_j = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}x_j, \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}x_j \right)_{LR}$$

而 $\widetilde{b}_i = (b_i, \underline{b}_i \overline{b}_i)_{LR}$,因此

$$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}x_j \leqslant \widetilde{b}_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}x_j \geqslant \underline{b}_i, \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}x_j \leqslant \overline{b}_i.$$

记

$A = (a_{ij})_{m \times n}$,$\underline{A} = (\underline{a}_{ij})_{m \times n}$,$\overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{m \times n}$,$b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$,$\underline{b} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \cdots, \underline{b}_m)^{\mathrm{T}}$,$\overline{b} = (\overline{b}_1, \overline{b}_2, \cdots, \overline{b}_m)^{\mathrm{T}}$

则有

$$\widetilde{A}x \leqslant \widetilde{b} \Leftrightarrow Ax \leqslant b, \quad \underline{A}x \geqslant \underline{b}, \quad \overline{A}x \leqslant \overline{b}$$

这样,规划问题(9.10)就等价于下面 $3m$ 个线性不等式约束的普通线性规划问题

$$\max \quad Z = cx$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \leqslant b \\ \underline{A}x \geqslant \underline{b} \\ \overline{A}x \leqslant \overline{b} \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.11}$$

下面举例具体说明上述求解过程.

例 9.4.1 设某人运送甲、乙两种产品,甲种产品每包重“6 斤左右”,价值 20 元;乙种产品每包“大约 2 斤”重,价值 10 元;此人一次最多能拿“21 斤左右”,并希望拿的产品总价值最大,试问甲、乙两种产品应各拿多少包?

解 设此人拿甲、乙产品分别为 x_1 包与 x_2 包,则问题可以归结为解如下约束带有模糊系数的线性规划问题

$$\max \quad Z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \widetilde{6}x_1 + \widetilde{2}x_2 \leqslant \widetilde{21} \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

其中,$\widetilde{6} = (6,0,1)_{LR}$,$\widetilde{2} = (2,1,1)_{LR}$,$\widetilde{21} = (21,1,5)_{LR}$. 按式(9.11)知上述问题等价于如下普通线性规划问题:

$$\max \quad Z = 20x_1 + 10x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 \\ x_2 \geqslant 1 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法得最优解为 $x_1^* = \frac{11}{4}, x_2^* = \frac{9}{4}$,最优值 $z^* = \frac{310}{4} = 77.5$.

如果允许将货物包拆开,则此人可以携带货物甲$\frac{11}{4}$包,乙$\frac{9}{4}$包,总价值达 77.5 元. 如果货物必须拿整包,则需限制 x_1, x_2 取整数,也即用整数规划方法求解. 结果应取货甲 2 包,乙 2 包(或甲 3 包,乙 1 包),总价值达 70 元.

9.4.3 目标带有模糊系数的线性规划

考察如下规划问题

$$\widetilde{\max} \quad \widetilde{Z} = \tilde{c}x$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} Ac \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.12}$$

其中,$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n)^{\mathrm{T}}$, $\tilde{c}x = (\tilde{c}_1x_1, \tilde{c}_2x_2, \cdots, \tilde{c}_nx_n)^{\mathrm{T}}$.

由于$\tilde{c}_i = (c_i, \underline{c}_i, \bar{c}_i)_{LR}$,故 $\tilde{c}x = \left(\sum_{i=1}^{n} c_ix_i, \sum_{i=1}^{n} \underline{c}_ix_i, \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_ix_i\right)_{LR} = (cx, \underline{c}x, \bar{c}x)_{LR}$. 其中,

$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$, $\underline{c} = (\underline{c}_1, \underline{c}_2, \cdots, \underline{c}_n)^{\mathrm{T}}$, $\bar{c} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_n)^{\mathrm{T}}$.

由$\widetilde{\max}$的近似公式可知式(9.12)等价于下述三个目标的线性规划问题

$$\begin{cases} \max Z = cx \\ \min \underline{Z} = \underline{c}x \\ \max \bar{Z} = \bar{c}x \\ \text{s.t. } Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.13}$$

对式(9.13)可以利用上节中多目标线性规划的方法求出模糊最优解,此解作为问题(9.12)的近似模糊最优解.

例 9.4.2 解如下的目标带有模糊系数的模糊线性规划问题.

$$\widetilde{\max} \quad \widetilde{Z} = \widetilde{20}x_1 + \widetilde{10}x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

其中$\widetilde{20}=(20,3,4)_{LR}$，$\widetilde{10}=(10,2,1)_{LR}$.

解 此问题近似等价于如下问题

$$\begin{cases}\max Z = 20x_1 + 10x_2 \\ \min \underline{Z} = 3x_1 + 2x_2 \\ \max \overline{Z} = 4x_1 + 1x_2 \\ \text{s.t. } 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 \\ x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

分别对每个目标在所给约束下求出最优解得

$$x_1^{(1)}=0,\quad x_2^{(1)}=10.5,\quad Z=105.\ 此时,\underline{Z}=21,\quad \overline{Z}=10.5.$$

$$x_1^{(2)}=0,\quad x_2^{(2)}=0,\quad \underline{Z}=0.\quad 此时,Z=0,\quad \overline{Z}=0.$$

$$x_1^{(3)}=3.5,\quad x_2^{(3)}=0,\quad \overline{Z}=14.\ 此时,\underline{Z}=70,\quad Z=10.5.$$

主观地给出伸缩性指标为$d_1=5$，$d_2=20$，$d_3=4$，对应地得到三个模糊目标集M_1，M_2，M_3，它们的隶属函数分别为

$$M_1(x)=g_1(20x_1+10x_2)=\begin{cases}0, & 20x_1+10x_2<100 \\ 1-\frac{1}{5}(105-20x_1-10x_2), & 100\leqslant 20x_1+10x_2<105 \\ 1, & 20x_1+10x_2\geqslant 105\end{cases}$$

$$M_2(x)=g_2(3x_1+2x_2)=\begin{cases}0, & 3x_1+2x_2>20 \\ 1-\frac{1}{20}(23x_1+2x_2), & 0\leqslant 3x_1+2x_2\leqslant 20 \\ 1, & 3x_1+2x_2<0\end{cases}$$

$$M_3(x)=g_3(4x_1+x_2)=\begin{cases}0, & 4x_1+x_2<10 \\ 1-\frac{1}{4}(14-4x_1-x_2), & 10\leqslant 4x_1+x_2<14 \\ 1 & 4x_1+x_2\geqslant 14\end{cases}$$

令$M=M_1\cap M_2\cap M_3$，则问题归结为如下线性规划问题

$$\begin{cases}\max(\lambda) \\ 1-\frac{1}{5}(105-20x_1-10x_2)\geqslant\lambda \\ 1-\frac{1}{20}(3x_1+2x_2)\geqslant\lambda \\ 1-\frac{1}{4}(14-4x_1-x_2)\geqslant\lambda \\ 6x_1+2x_2\leqslant 21 \\ \lambda\leqslant 1, x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\max(\lambda) \\ 20x_1 + 10x_2 - 5\lambda \geqslant 100 \\ 3x_1 + 2x_2 + 20\lambda \leqslant 20 \\ 4x_1 + x_2 - 4\lambda \geqslant 10 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 \\ \lambda \leqslant 1, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

用单纯形法解上述线性规划问题,得最优解为

$$x_1^* = 0.488, \quad x_2^* = 9.035, \quad \lambda^* = 0.022.$$

相应地有 $Z^* = 100.11, \underline{Z}^* = 19.534, \overline{Z}^* = 10.987$. 于是得近似的模糊最优值为

$$\tilde{Z}^* = (100.11, 19.534, 10.987)_{LR}.$$

需要注意的是在主观给出伸缩指标 d_1, d_2, d_3 后,可能导出线性规划问题的约束区域为空集,这时没有最优解. 这就需要适当调整伸缩指标,以保证最优解存在.

习　题　9

1. 设函数$f(x)\begin{cases}axe^{1-bx}, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{2}{b} \\ 0, & 其他.\end{cases}$

(1)给出 $A = \left[\dfrac{1}{2b}, \dfrac{3}{2b}\right]$,求 f 在 A 上的模糊优越集及模糊极大值.

(2)给出,$A = e^{-x^2} \in F(\mathbf{R})$,求 f 在 A 上的模糊优越集及模糊极大值.

2. 某伞厂经市场预测发现,伞的直径 x 与效益 $f(x)$ 有如下关系

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-100}{2}\right)^2}, & 50 \leqslant x \leqslant 100 \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

已知该厂适合于生产各种直径的伞的条件是一个模糊集 A,其隶属函数为

$$A(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 60 \\ \dfrac{1}{1+(x-60)^2}, & x > 60. \end{cases}$$

(1)试求 f 的模糊优越集 M_f;

(2)试用对称型模糊规划求最佳投放量 x^*;

(3)若对 M_f 和 A 的权重分别为 0.4 和 0.6,试求此时最佳投放量 x^*.

3. 甲机械每工时耗费(维修、折旧等)3 元,获净利 7 元,每月能运行 400 ~ 410 个工时;乙机械每工时耗费 2 元,获净利 3 元,每月能运行 250 ~ 255 个工时;甲、乙两机械每月总耗费要求不超过 1500 ~ 1550 元. 试问应如何安排两机械运行可以获

最大利润?

4. 求解下列多目标线性规划

$$\max\begin{cases}Z_1 = x_1 + 2x_2\\ Z_2 = 3x_1 - x_2\end{cases}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1 + 2x_2 \leqslant 18\\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 18.\\ x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

5. 解下列模糊线性规划问题

$$\max \quad Z = 2.5x_1 + 1.5x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1 + x_2 \leqslant 10\\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 12.\\ x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

设“ $\leqslant 10$”和“$\leqslant 12$”的收缩性指标分别为 0.3 和 0.2.

第 10 章　模糊信息系统与知识获取

粗糙集理论是波兰数学家 Z. Pawlak 于 20 世纪 80 年代提出的一种处理不精确、不确定与不完全数据的新的数学理论. 这套理论认为如果将自然界离散表示的对象集设为 U,那么人们所具有的关于 U 的认识能力或称为知识就是人们对 U 的划分或分类能力. 粗糙集理论首创将知识与分类联系起来,并通过概念知识库 $K=(U,R)$ 给粗糙集理论一个很好的纯数学理论和方法的依托.

模糊集理论也是处理不确定性问题的有效数学工具,由于这两种理论研究的对象,研究的方法既有区别又有联系,因此将这两种理论进行某种"整合"后去处理不确定性问题一直是相关研究者比较关注的课题. 1996 年,Dubois 和 Prade 首先提出了模糊粗糙集的概念,自其提出后,模糊粗糙集在理论和实际应用上都取得了巨大的发展.

本章分四节分别讨论了 Pawlak 粗糙集理论的基本概念,信息系统的属性约简与知识获取,模糊粗糙集的基本理论和模糊信息系统的属性约简.

§10.1　粗糙集理论的基本概念

10.1.1　粗糙集的基本概念

设 U 为非空有限集,R 为 U 上的二元等价关系,序对 (U,R) 称为近似空间. 在等价关系 R 下对数据集合 U 的划分,称为知识 U/R. U 上的一簇划分称为关于 U 的知识库. 设 $X\subseteq U$,我们定义 U 上的两个一元算子.

定义 10.1.1　设 (U,R) 为近似空间.

$$\underline{R}X=\{a\in U\mid [a]_R\subseteq X\} \tag{10.1}$$

$$\overline{R}X=\{a\in U\mid [a]_R\cap X\neq\varnothing\} \tag{10.2}$$

分别称之为 X 关于 R 的下近似和上近似.

在近似空间 (U,R) 中,U 中的每个等价类 $[a]_R(\forall a\in U)$ 称为基本集或原子集,任意有限多个基本集的并称为可定义集.

下近似、上近似也可以用下面的等式表达

$$\underline{R}X=\cup\{Y\in U/R\mid Y\subseteq X\} \tag{10.3}$$

$$\overline{R}X=\cup\{Y\in U/R\mid Y\cap X\neq\varnothing\} \tag{10.4}$$

集合 $bn_R(X)=\overline{R}X-\underline{R}X$ 称为 X 的 R 边界域；$pos_R(X)=\underline{R}X$ 称为 X 的 R 正域；$neg_R(X)=U-\overline{R}X$ 称为 X 的 R 负域. 显然 $\overline{R}X=pos_R(X)\cup bn_R(X)$.

$\underline{R}X$ 或 $pos_R(X)$ 是由那些根据知识 R 判断肯定属于 X 的 U 中元素组成的集合；$\overline{R}X$ 是那些根据知识 R 判断可能属于 X 的 U 中元素组成的集合；$bn_R(X)$ 是那些根据知识 R 既不能判断肯定属于 X 又不能判断肯定不属于 X 的 U 中元素组成的集合；$neg_R(X)$ 是那些根据知识 R 判断肯定不属于 X 的 U 中元素组成的集合.

定理 10.1.1 (1) X 为 R 可定义集当且仅当 $\overline{R}X=\underline{R}X$.

(2) X 为 R 粗糙集当且仅当 $\overline{R}X\neq\underline{R}X$.

我们也可以将 $\underline{R}X$ 描述为 X 中的最大可定义集，将 $\overline{R}X$ 描述为含有 X 的最小可定义集.

例 10.1.1 设 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$ 等价类 $U/R=\{\{x_1,x_4,x_8\},\{x_2,x_5,x_7\},\{x_3\},\{x_6\}\}$.

设 $X_1=\{x_1,x_4,x_7\}$，$X_2=\{x_2,x_8\}$ 则有

$$\underline{R}(X_1)=\varnothing$$

$$\overline{R}(X_1)=\{x_1,x_2,x_4,.x_5,x_7,x_8\}$$

$$\underline{R}(X_2)=\varnothing$$

$$\overline{R}(X_2)=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_7,x_8\}$$

$$\underline{R}(X_1\cup X_2)=\{x_1,x_4,x_8\}$$

$$\overline{R}(X_1\cup X_2)=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_7,x_8\}$$

显然，X_1，X_2 为 R 粗糙集.

集合（范畴）的不确定性是由于边界域的存在而引起的. 集合的边界域越大，其精确性则越低，为了更准确地表达这一点，我们引入精度的概念. 由等价关系 R 定义的集合 X 的近似精度为

$$\alpha_R(X)=\frac{|\underline{R}X|}{|\overline{R}X|} \tag{10.5}$$

其中 $X\neq\varnothing$，$|X|$ 表示集合 X 的基数. 如果 $X=\varnothing$，可以定义 $\alpha_R(X)=1$.

$\alpha_R(X)$ 表示我们获得关于集合 X 的知识是否完全的程度. 显然，$0\leqslant\alpha_R(X)\leqslant 1$. 当 $\alpha_R(X)=1$ 时，X 的 R 边界域为空集，集合 X 为 R 可定义的；当 $\alpha_R(X)<1$ 时，集合 X 有非空 R 边界域，集合 X 为 R 粗糙集.

类似近似精度，我们令

$$\rho_R(X)=1-\alpha_R(X) \tag{10.6}$$

$\rho_R(X)$ 表示我们获得关于集合 X 的知识的不完全的程度，即 $\rho_R(X)$ 称为 X 的 R 粗糙度.

下面介绍关于 R 下近似集和上近似集的一些基本性质.

定理 10.1.2

(1) $\underline{R}X\subseteq X\subseteq\overline{R}X$；　　(2) $\underline{R}\varnothing=\overline{R}\varnothing=\varnothing$，$\underline{R}U=\overline{R}U=U$；

(3) $\overline{R}(X\cup Y)=\overline{R}X\cup\overline{R}Y$; (4) $\underline{R}(X\cap Y)=\underline{R}X\cap\underline{R}Y$;

(5) $X\subseteq Y\Rightarrow\underline{R}X\subseteq\underline{R}Y$; (6) $X\subseteq Y\Rightarrow\overline{R}X\subseteq\overline{R}Y$;

(7) $\underline{R}(X\cup Y)\supseteq\underline{R}X\cup\underline{R}Y$; (8) $\overline{R}(X\cap Y)\subseteq\overline{R}X\cap\overline{R}Y$;

(9) $\underline{R}(\sim X)=\sim\overline{R}X$; (10) $\overline{R}(\sim X)=\sim\underline{R}X$;

(11) $\underline{R}(\underline{R}X)=\overline{R}(\underline{R}X)=\underline{R}X$; (12) $\overline{R}(\overline{R}X)=\underline{R}(\overline{R}X)=\overline{R}X$.

证明

(1)①若 $x\in\underline{R}X$,则$[x]_R\subseteq X$,但 $x\in[x]_R$,所以 $x\in X$,因此$\underline{R}X\subseteq X$.

②设 $x\in X$,则$[x]_R\cap X\neq\varnothing$,所以 $x\in\overline{R}X$,因此 $X\subseteq\overline{R}X$.

(2)①从(1)可知$\underline{R}\varnothing\subseteq\varnothing$,并且空集包含于任意集合中,所以$\underline{R}\varnothing=\varnothing$.

②假设$\overline{R}\varnothing\neq\varnothing$,存在 x,使得 $x\in\overline{R}\varnothing$,因此$[x]_R\cap\varnothing\neq\varnothing$,而$[x]_R\cap\varnothing=\varnothing$,与假设矛盾. 因此,$\overline{R}\varnothing=\varnothing$.

③由(1)知,$\underline{R}U\subseteq U$. 又因为当 $x\in U$ 时,有$[x]_R\subseteq U$,所以 $x\in\underline{R}U$,即 $U\subseteq\underline{R}U$,因此,$\underline{R}U=U$.

④由(1)知,$\overline{R}U\supseteq U$,但是$\overline{R}U\subseteq U$,因此$\overline{R}U=U$.

(3) $x\in\overline{R}(X\cup Y)\Leftrightarrow[x]_R\cap(X\cup Y)\neq\varnothing\Leftrightarrow([x]_R\cap X)\cup([x]_R\cap Y)\neq\varnothing\Leftrightarrow[x]_R\cap X\neq\varnothing\vee[x]_R\cap Y\neq\varnothing\Leftrightarrow x\in\overline{R}X\vee x\in\overline{R}Y\Leftrightarrow x\in\overline{R}X\cup\overline{R}Y$

因此$\overline{R}(X\cup Y)=\overline{R}X\cup\overline{R}Y$.

(4) $x\in\underline{R}(X\cap Y)\Leftrightarrow[x]_R\subseteq X\cap Y\Leftrightarrow[x]_R\subseteq X\wedge[x]_R\subseteq Y\Leftrightarrow x\in\underline{R}X\cap\underline{R}Y$

因此,$\underline{R}(X\cap Y)=\underline{R}X\cap\underline{R}Y$.

(5)设 $X\subseteq Y$,则 $X\cap Y=X$,所以$\underline{R}(X\cap Y)=\underline{R}X$. 由(4)知,$\underline{R}X\cap\underline{R}Y=\underline{R}X$,因此$\underline{R}X\subseteq\underline{R}Y$.

(6)设 $X\subseteq Y$,则 $X\cup Y=Y$,所以 $\overline{R}(X\cup Y)=\overline{R}Y$. 由(3)知,$\overline{R}X\cup\overline{R}Y=\overline{R}Y$,因此$\overline{R}X\subseteq\overline{R}Y$.

(7)因为 $X\subseteq X\cup Y$,$Y\subseteq X\cup Y$,所以$\underline{R}X\subseteq\underline{R}(X\cup Y)$,$\underline{R}Y\subseteq\underline{R}(X\cup Y)$,故

$$\underline{R}X\cup\underline{R}Y\subseteq\underline{R}(X\cup Y).$$

(8)因为 $X\cap Y\subseteq X$,$X\cap Y\subseteq Y$,所以$\overline{R}(X\cap Y)\subseteq\overline{R}X$,$\overline{R}(X\cap Y)\subseteq\overline{R}Y$,故

$$\overline{R}(X\cap Y)\subseteq\overline{R}X\cap\overline{R}Y.$$

(9) $x\in\underline{R}(X)$当且仅当$[x]_R\subseteq X$ 当且仅当$[x]_R\cap\sim X=\varnothing$当且仅当 $x\notin\overline{R}(\sim X)$当且仅当 $x\in\sim\overline{R}(\sim X)$,所以$\underline{R}(X)=\sim\overline{R}(\sim X)$.

(10)用 $\sim X$ 去替换(10)中的 X,则得到$\overline{R}(X)=\sim\underline{R}(\sim X)$.

(11)①从(1)可知$\underline{R}(\underline{R}X)\subseteq\underline{R}X$,现要证明$\underline{R}X\subseteq\underline{R}(\underline{R}X)$,$\forall x\in\underline{R}X$,则$[x]_R\subseteq X$,所以$\underline{R}([x]_R)\subseteq\underline{R}X$,但是$\underline{R}([x]_R)=[x]_R$,所以$[x]_R\subseteq\underline{R}(X)$,因此 $x\in\underline{R}(\underline{R}X)$,即$\underline{R}X\subseteq\underline{R}(\underline{R}X)$,故$\underline{R}(\underline{R}X)=\underline{R}X$.

②由(1)知,$\underline{R}X\subseteq\overline{R}(\underline{R}X)$,现要证明$\underline{R}X\supseteq\overline{R}(\underline{R}X)$,$\forall x\in\overline{R}(\underline{R}X)$则 $[x]_R\cap\underline{R}X\neq\varnothing$,即存在 $y\in[x]_R$ 和 $y\in\underline{R}X$,所以$[y]_R\subseteq X$,但$[y]_R=[x]_R$,所以$[x]_R\subseteq X$,并

且$x\in \underline{R}X$,所以$\underline{R}X\supseteq \overline{R}(\underline{R}X)$,即$\underline{R}X=\overline{R}(\underline{R}X)$.

(12)①由(1)知,$\overline{R}X\subseteq \overline{R}(\overline{R}X)$,又当$x\in \overline{R}(\overline{R}X)$时,有$[x]_R\cap \overline{R}X\neq\varnothing$.因此存在$y\in[x]_R$且$y\in \overline{R}X$,所以$[y]_R\cap X\neq\varnothing$.但$[y]_R=[x]_R$,所以$[x]_R\cap X\neq\varnothing$,即$x\in \overline{R}X$,这样就有$\overline{R}X\supseteq \overline{R}(\overline{R}X)$.故$\overline{R}(\overline{R}X)=\overline{R}X$.

②由(1)知,$\underline{R}(\overline{R}X)\subseteq \overline{R}X$.又当$x\in \overline{R}X$时,有$[x]_R\cap X\neq\varnothing$,所以$[x]_R\subseteq \overline{R}X$,即$x\in \underline{R}(\overline{R}X)$,这样就有$\underline{R}(\overline{R}X)\supseteq \overline{R}X$,故$\underline{R}(\overline{R}X)=\overline{R}X$.

性质(7)和性质(8)非常重要,这两个性质说明交集的上近似不等于上近似的交;同样并集的下近似不等于下近似的并.性质(9)和性质(10)也很重要,这两个性质描述了集合的下近似和上近似之间的补集的关系.

10.1.2 知识约简的基本概念

知识约简是粗糙集理论的核心内容之一.众所周知,知识库中的知识并不是同等重要的,甚至其中某些知识是冗余的.所谓知识约简,就是在保持知识库分类能力不变的条件下,删除其中不相关或不重要的知识.

定义 10.1.2 设$\mathscr{R}$是一个等价关系族,$r\in\mathscr{R}$,如果$\mathrm{IND}(\mathscr{R})=\mathrm{IND}(\mathscr{R}-\{r\})$,则称$r$在$\mathscr{R}$中是可被约去的知识;否则称$r$为不可被约去的知识,其中$\mathrm{IND}(\mathscr{R})=\bigcap\limits_{R\in\mathscr{R}}R$.

定义 10.1.3 如果$\forall r\in\mathscr{R}$是$\mathscr{R}$中不可约去的,则等价关系族$\mathscr{R}$是独立的;否则$\mathscr{R}$是相关的.如果$P=\mathscr{R}-\{r\}$是独立的,则P是$\mathscr{R}$中的一个约简.

定义 10.1.4 $\mathscr{R}$中所有不可约去的关系称为核,由所有核构成的集合称为$\mathscr{R}$的核集,记成$\mathrm{CORE}(\mathscr{R})$.

定理 10.1.3 如果$\mathscr{R}$是独立的并且$P\subseteq\mathscr{R}$,则P也是独立的.

证明 用反证法.设$P\subseteq\mathscr{R}$且P是相关的,则存在$S\subseteq P$使得$\mathrm{IND}(S)=\mathrm{IND}(P)$,其中$S$是独立的,这意味着$\mathrm{IND}(S\cup(\mathscr{R}-P))=\mathrm{IND}(\mathscr{R})$,所以$S\cup(\mathscr{R}-P)\subset\mathscr{R}$,可见$\mathscr{R}$是相关的,与假设矛盾.

定理 10.1.4 $\mathrm{CORE}(\mathscr{R})=\cap\mathrm{RED}(\mathscr{R})$.其中$\mathrm{RED}(\mathscr{R})$是$\mathscr{R}$的所有约简族.

证明 如果P是$\mathscr{R}$的一个约简,并且$r\in\mathscr{R}-P$,$r\notin\cap\{P: P\in\mathrm{RED}(\mathscr{R})\}$,则$\mathrm{IND}(\mathscr{R})=\mathrm{IND}(P)$,由于$P\subseteq\mathscr{R}-\{r\}\subseteq\mathscr{R}$,所以$\mathscr{R}$是相关的.如果$\mathscr{R},P,Q$都是等价关系的集合,且$P\subseteq Q\subseteq\mathscr{R}$,所以$R$是相关的,由定理10.1.3可知$Q$是相关的,所以$\mathrm{IND}(Q)=\mathrm{IND}(P)$.假设$Q=P-\{r\}$,则$r\notin\mathrm{CORE}(\mathscr{R})$,所以$\mathrm{CORE}(\mathscr{R})\subseteq\cap\{P: P\in\mathrm{RED}(\mathscr{R})\}$;另一方面,设$r\notin\mathrm{CORE}(\mathscr{R})$,则$r$在$\mathscr{R}$中是过剩的,这就意味着$\mathrm{IND}(\mathscr{R})=\mathrm{IND}(\mathscr{R}-\{r\})$,则存在一个独立子集$S$,使得$S\subseteq\mathscr{R}-\{r\}$.所以,$\mathrm{IND}(S)=\mathrm{IND}(\mathscr{R})$,显然$S$是$\mathscr{R}$的一个约简,所以$r\notin\cap\{P: P\in\mathrm{RED}(\mathscr{R})\}$.于是有$\mathrm{CORE}(\mathscr{R})\supseteq\cap\{P: P\in\mathrm{RED}(\mathscr{R})\}$.

在应用中,一个分类相对于另一个分类的关系十分重要,因此我们将介绍知识

的相对约简和相对核的概念. 首先给出一个分类相对于另一个分类的正域.

令 P 和 Q 为 U 中的等价关系,Q 的 P 正域记为 $\text{pos}_P(Q)$,即

$$\text{pos}_P(Q) = \bigcup_{X \in U/Q} \underline{P}X \tag{10.7}$$

Q 的 P 正域是 U 中所有根据分类 U/P 的信息可以准确地划分到关系 Q 的等价类中去的对象集合.

定义 10.1.5　设 P 和 Q 都是等价关系族,如果 $\text{pos}_P(Q) = \text{pos}_{(P-\{R\})}(Q)$,则称 $R \in P$ 是 P 上 Q - 可约去的;否则 R 是 P 上 Q - 不可约的.

定义 10.1.6　如果 P 上的每个等价关系 R 都是 Q - 不可约的,则称 P 是 Q - 独立的或 P 关于 Q 是独立的.

定义 10.1.7　所有 P 中 Q - 不可约去的等价关系的集合被称为 P 的 Q - 核,记为 $\text{CORE}_Q(P)$.

定理 10.1.5　等价关系族 $S \subseteq P$ 是 P 的 Q - 约简,当且仅当 S 是 P 的 Q - 独立子族并且 $\text{pos}_P(Q) = \text{pos}_S(Q)$.

定理 10.1.6　$\text{CORE}_Q(P) = \cap \text{RED}_Q(P)$,其中 $\text{RED}_Q(P)$ 是 P 中的所有 Q - 约简族.

§10.2　信息系统的属性约简与知识获取

人之所以有智能行为是因为人有知识. 要让机器具有智能行为的能力,就必须让机器具有相应的知识,机器需要以人的知识作为其工作基础. 知识表示就是要研究用机器表示知识的可行的、有效的、通用的原则和方法. 本节中,我们介绍一种基于信息表的知识表达形式,这是 Rough 集理论中对知识进行表达和处理的基本工具.

定义 10.2.1　称四元组 $S = (U, A, V, F)$ 为一个信息系统(知识表达系统),其中 U 为对象集,即 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. U 中的每个 $x_i (i \leqslant n)$,称为一个对象. 而 A 为属性集,即 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. A 中的每个 $a_j (j \leqslant m)$,称为一个属性. F 为 U 和 A 的关系集,即 $F = \{f_j : j \leqslant m\}$. 其中 $f_j : U \to V_j (j \leqslant m)$, V_j 为属性 a_j 的值域,$V = \{V_1, V_2, \cdots, V_m\}$.

信息系统的数据以关系表的形式表示. 关系表的行对应要研究的对象,列对应对象的属性,对象的信息是通过指定对象的各属性值来表达的.

显然,信息表或决策表的每个属性都对应一个等价关系,一个表可以看做是定义的一族等价关系,即知识库. 那么可以利用粗糙集的知识约简转化为属性约简.

例 10.2.1　表 10.1 给出了一个关于玩具积木的信息表.

我们将玩具积木按照颜色、形状和大小可以分别进行如下分类,得到有关玩具积木的概念知识.

表 10.1

样本集	颜色(R_1)	形状(R_2)	大小(R_3)
x_1	Red	Round	Small
x_2	Blue	Square	Large
x_3	Red	Triangula	Small
x_4	Blue	Triangular	Small
x_5	Yellow	Round	Small
x_6	Yellow	Square	Small
x_7	Red	Triangular	Large
x_8	Yellow	Triangular	Large

这里,信息表中所包含的属性集只有对对象(积木)进行描述的属性.

我们在处理实际问题时,有一类特殊且重要的信息表——决策表.多数决策问题都可以用决策表形式来表达,这一工具在决策应用中起着重要的作用.

决策表可以根据信息系统定义如下.

定义 10.2.2 一个决策表是一个信息系统 $S=(U,A,V,f)$, $A=C\cup D,C\cap D=\varnothing$是属性集合,子集 C 和 D 分别称为条件属性集和决策属性集.

例 10.2.2 一个关于某些病人的决策表如表 10.2 所示.其中 $U=\{e_1,e_2,\cdots,e_8\}$, $C=\{$头痛,肌肉痛,体温$\}$, $D=\{$流感$\}$.

表 10.2

属性 / 病人	条件属性			决策属性
	头痛	肌肉痛	体温	流感
e_1	是	是	正常	否
e_2	是	是	高	是
e_3	是	是	很高	是
e_4	否	是	正常	否
e_5	否	否	高	否
e_6	否	是	很高	是
e_7	否	否	高	是
e_8	否	是	很高	否

令 C_1 = 头痛, C_2 = 肌肉痛, C_3 = 体温, 则各种属性的分类情况为

$$U/\{C_1\} = \{\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}\}$$

$$U/\{C_2\} = \{\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_8\}, \{e_5, e_7\}\}$$

$$U/\{C_3\} = \{\{e_1, e_4\}\{e_2, e_5, e_7\}, \{e_3, e_6, e_8\}\}$$

$$U/\{C_1, C_2\} = \{\{e_1, e_2, e_3\}\{e_4, e_6, e_8\}, \{e_5, e_7\}\}$$

$$U/\{C_1, C_3\} = \{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_6, e_8\}, \{e_5, e_7\}\}$$

$$U/\{C_2, C_3\} = \{\{e_1, e_4\}, \{e_2\}, \{e_3, e_6, e_8\}, \{e_5, e_7\}\}$$

$$U/\{C\} = \{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_6, e_8\}, \{e_5, e_7\}\}$$

$$U/\{D\} = \{\{e_2, e_3, e_6, e_7\}, \{e_1, e_4, e_5, e_8\}\}$$

因为$\text{pos}_C(D) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，而

$$\text{pos}_{(C-\{C_1\})}(D) = \{e_1, e_2, e_4\} \neq \text{pos}_C(D)$$

$$\text{pos}_{(C-\{C_2\})}(D) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \text{pos}_C(D)$$

$$\text{pos}_{(C-\{C_3\})}(D) = \varnothing \neq \text{pos}_C(D)$$

$$\text{pos}_{(C-\{C_1,C_2\})}(D) = \{e_1, e_4\} \neq \text{pos}_C(D)$$

$$\text{pos}_{(C-\{C_2,C_3\})}(D) = \varnothing \neq \text{pos}_C(D)$$

所以 C 的 D 约简为 $C-\{C_2\} = \{C_1, C_3\}$, C 的 D 核为$\{C_1, C_3\}$.

决策表属性约简的过程,就是从决策表系统的条件属性中去掉不必要的条件属性,从而分析所得约简中的条件属性对于决策属性的决策规则.

下面,具体介绍几种决策表属性约简的算法. 这里,设原始决策表的条件属性集合为 $P = \{a_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$,决策属性集合为 $D = \{d\}$.

1. 一般约简算法

对于决策表中的每一个条件属性 a_i,进行如下过程,直至条件属性集合不再发生变化为止. 如果删除该属性 a_i 使得 $\text{pos}_{(P\setminus\{a_i\})}(D) = \text{pos}_P(D)$,则说明属性 a_i 是相对于决策属性 d 不必要的,从决策表中删除属性 a_i 所在列并将重复地进行合并；否则,说明属性 a_i 是相对于决策属性 d 必要的,不能删除.

上述算法,能够得到决策表的一个属性约简结果,但不一定能够得到一个满意的属性约简结果. 并且该算法所需要的时间复杂度和空间复杂度都很高,是个NP-hard问题,所以实际计算属性约简的时候,往往采用某种启发式的算法.

2. 基于区分矩阵和逻辑运算的属性约简算法

利用区分矩阵来表达知识有许多的优点,特别是该方法能容易地计算约简和核.

定义 10.2.3　令决策表系统为 $S = \langle U, C\cup D, V, f\rangle$,子集 $C = \{a_i \mid i = 1, 2, \cdots, m\}$ 和 $D = \{d\}$ 分别称为条件属性集和决策属性集, $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是论域,

$a_i(x_j)$是样本 x_j 在属性 a_i 上的取值. $C_D(i,j)$表示区分矩阵中第 i 行、第 j 列的元素,则区分矩阵 C_D 定义为

$$C_D(i,j) = \begin{cases} \{a_k \mid a_k \in C \wedge a_k(x_i) \neq a_k(x_j)\}, & d(x_i) \neq d(x_j); \\ 0, & d(x_i) = d(x_j). \end{cases} \tag{10.8}$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,n$.

显然,区分矩阵是一个依对角线对称的矩阵,在考虑区分矩阵的时候,只需要考虑其上三角(或下三角)部分就可以了.

第 1 步　计算决策表的区分矩阵 C_D;

第 2 步　对于区分矩阵中的所有取值为非空集合的元素 $C_{ij}(C_{ij}\neq 0, C_{ij}\neq\varnothing)$,建立相应的析取逻辑表达式 $L_{ij} = \bigvee_{a_i\in C_{ij}} a_i$;

第 3 步　将所有的析取逻辑表达式 L_{ij}进行合取运算,得一个合取范式 L,即 $L = \bigwedge_{C_{ij}\neq 0, C_{ij}\neq\varnothing} L_{ij}$;

第 4 步　将合取范式 L 转换为析取范式的形式,得 $L' = \bigvee_i L_i$;

第 5 步　输出约简结果.

析取范式中的每个合取项对应一个属性约简的结果,每个合取项中所包含的属性组成约简后的条件属性集合.

例 10.2.3　考虑表 10.3 给出的决策表. 这里 $C=\{a,b,c\}$, $D=\{d\}$. 决策表 10.3 对应的区分矩阵如下

$$\begin{pmatrix} a & a & a,b & a,b,c & 0 \\ & & a,b & b,c & a,b,c \\ & & a,b & b,c & a,b,c \\ & & & & a,c \\ & & & & a \end{pmatrix}$$

进而可以得到 12 个析取逻辑表达式:

$$L_{12}=a;\quad L_{13}=a;\quad L_{14}=a\vee b;\quad L_{15}=a\vee b\vee c$$

$$L_{24}=a\vee b;\quad L_{25}=b\vee c;\quad L_{26}=a\vee b\vee c$$

$$L_{34}=a\vee b;\quad L_{35}=b\vee c;\quad L_{36}=a\vee b\vee c$$

$$L_{46}=a\vee c;\quad L_{56}=a$$

将这些表达式合取得到合取表达式 L

$$L=L_{12}\wedge L_{13}\wedge\cdots\wedge L_{56}=a\wedge a\wedge(a\vee b)\wedge\cdots\wedge(a\vee c)a$$

对 L 进行整理,最终得到析取范式 $L'=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$,因此决策表有两个 D 约简 $\{a,b\}$ 和 $\{a,c\}$, D 的核是 $\{a\}$.

表 10.3

U	a	b	c	d
1	2	2	0	1
2	1	2	0	0
3	1	2	0	1
4	0	0	0	0
5	1	0	1	0
6	2	0	1	1

3. 基于互信息的属性约简算法——MIBARK 算法

这里我们首先建立知识与信息熵的关系.

设 U 为一个论域,C 和 D 为 U 上的条件属性集和决策属性集,可以认为 U 上任一属性集是定义在 U 上的子集组成的 σ 代数上的一个随机变量,其概率分布可以通过如下方法来确定.

设 D 在 U 上导出的划分为 $X=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$,其概率分布可以表示如下

$$(X:p)=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ p(X_1) & p(X_2) & \cdots & p(X_n) \end{bmatrix}$$

其中:$p(X_i)=\dfrac{|X_i|}{|U|}$,$i=1,2,\cdots,n$,$|\cdot|$表示基数.

设 D 和 C 在 U 上导出的划分分别为$\dfrac{U}{D}=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$,$\dfrac{U}{C}=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_m\}$,则 D 的熵 $H(D)$ 可以定义为 $H(D)=-\sum\limits_{i=1}^{n}p(X_i)\log(p(X_i))$;知识 D 相对于知识 C 的条件熵 $H(D\mid C)$ 定义为

$$H(D\mid C)=-\sum_{i=1}^{m}p(Y_i)\sum_{j=1}^{n}p(X_j\mid Y_i)\log(p(X_j\mid Y_i)) \tag{10.9}$$

其中,$p(X_j\mid Y_i)=\dfrac{|X_j\cap Y_i|}{|Y_i|}$,$i=1,2,\cdots,m$;$j=1,2,\cdots,n$,$|\cdot|$表示基数.

定义 10.2.4 条件属性集合 $A\subseteq C$ 和决策属性 D 之间的互信息定义为

$$I(A,D)=H(D)-H(D\mid A)$$

式中 $I(A,D)$ 为 A 和 D 之间的互信息,$I(A,D)$ 表征决策属性 D 从条件属性集合 A 获得的信息量.

引理 10.2.1 单调性:$A\subseteq B\subseteq C$,则 $I(A,D)\leqslant I(B,D)$.

引理 10.2.2 如果 $A\subseteq B\subseteq C$,则 $\mathrm{IND}(A)=\mathrm{IND}(B)$的充要条件是

$$H(D\mid A)=H(D\mid B).$$

定理 10.2.1 如果 $A\subseteq B\subseteq C$,则 $\mathrm{IND}(A)=\mathrm{IND}(B)$的充要条件是

$$I(A,D)=I(B,D).$$

证明 由引理 10.2.1 与互信息的定义易证.

定理 10.2.2 如果 $A\subseteq B\subseteq C$,且 A 为独立的,则 A 为 B 的一个约简的充要条件是

$$I(A,D)=I(B,D).$$

定理 10.2.3 $A\subseteq C, a\in A$,则 $I(A,D)>I(A-\{a\},D)$ 的充要条件为 a 在 A 中为必要属性.

证明 由定义 10.2.4、引理 10.2.1 和定理 10.2.1 易证.

定理 10.2.4 $A\subseteq B\subseteq C$,如果 $I(A,D)=I(B,D)$,则 A 的约简必为 B 的一个约简. MIBARK 算法(Mutual information—based algorithm for reduction of knowledge)

第 1 步 计算决策表中条件属性 C 和决策属性 D 的互信息 $I(C,D)=H(D)-H(D|C)$;

第 2 步 计算 C 相对于 D 的核 $\mathrm{CORE}_D(C)$;

第 3 步 令 $B=\mathrm{CORE}_D(C)$,对条件属性集 $C\backslash B$ 重复:

(1)对 $C\backslash B$ 中的每个属性 p,计算条件互信息 $I(p,D|B)$;

(2)选择使条件互信息 $I(p,D|B)$ 最大的属性,记为 p(若同时存在多个属性达到最大值,则从中选取一个与 B 的属性值组合数最少的属性作为 p);并且 $B=B\cup\{p\}$;

(3)若 $I(B,D)=I(C,D)$,则终止;否则,转(1);

第 4 步 最后得到的 B 就是 C 相对于 D 的一个相对约简.

例 10.2.4 一个有决策系统的数据表如表 10.4 所示。

表 10.4 一个有决策系统的数据表

	P_1	P_2	P_3	d
U_1	1	3	2	1
U_2	2	1	1	3
U_3	2	1	2	2
U_4	1	2	2	1
U_5	1	2	1	2

表 10.4 所示的决策系统,论域 U 由 5 个对象组成,其条件属性 C 包括 3 个属性,即 $\{P_1,P_2,P_3\}$. $V_{P_1}=\{1,2\}$, $V_{P_2}=\{1,2,3\}$, $V_{P_3}=\{1,2\}$. 决策属性 $V_d=\{1,2,3\}$.

对于表 10.4 所示的决策系统,有

$$U|\mathrm{IND}(C)=\{\{U_1\},\{U_2\},\{U_3\},\{U_4\},\{U_5\}\},$$

$$U \mid \mathrm{IND}(D) = \{\{U_1, U_4\}, \{U_2\}, \{U_3, U_5\}\},$$

初始互信息 $I(C, \{d\}) = \log 5 - \frac{4}{5}\log 2$. 利用 MIBARK 算法对表 10.4 进行简化，可得约简 $\{P_2, P_3\}$，其互信息仍为 $\log 5 - \frac{4}{5}\log 2$. 可以验证 $\{P_2, P_3\}$ 是决定一个对象属于哪一类的最小集，即为该决策系统的一个约简.

MIBARK 算法也是一种启发式算法，在大多数情况下能够得到决策表的最小属性约简. 但是，并不一定能够保证算法得到决策表的最小属性约简.

§10.3　模糊粗糙集的基本理论

10.3.1　模糊集合的 rough 近似

定义 10.3.1　设 (U,R) 为 Pawlak 近似空间，对于 U 上的 fuzzy 集 A，记

$$\underline{R}(A)(x) = \min\{A(y) : y \in [x]_R\} \tag{10.10}$$

$$\overline{R}(A)(x) = \max\{A(y) : y \in [x]_R\} \tag{10.11}$$

则 $\underline{R}(A)$ 和 $\overline{R}(A)$ 分别称为 fuzzy 集 A 关于近似空间 (U,R) 的下近似和上近似，而 $\underline{R} : F(U) \to F(U)$ 和 $\overline{R} : F(U) \to F(U)$ 分别称为下近似算子和上近似算子.

当 A 是经典集合时，$\underline{R}(A)(x) = 1$ 当且仅当 $[x]_R \subseteq A$，而 $\overline{R}(A)(x) = 1$ 当且仅当 $[x]_R \cap A \neq \varnothing$，此时有

$$\underline{R}(A) = \{x : \underline{R}(A)(x) = 1\} \tag{10.12}$$

$$\overline{R}(A) = \{x : \overline{R}(A)(x) = 1\} \tag{10.13}$$

即 $\underline{R}(A)(x)$ 和 $\overline{R}(A)(x)$ 分别称为 $\underline{R}(A)$ 和 $\overline{R}(A)$ 的特征函数.

定理 10.3.1　设 (U,R) 为 Pawlak 近似空间，关于近似空间 (U,R) 的 fuzzy 下近似算子与 fuzzy 上近似算子有以下性质：

(1) $\underline{R}A \subseteq A \subseteq \overline{R}A$;

(2) $\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}A \cap \underline{R}B$, $\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}A \cup \overline{R}B$;

(3) $\underline{R}(A) = \sim\overline{R}(\sim A)$, $\overline{R}(A) = \sim\underline{R}(\sim A)$;

(4) $\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}A \cup \underline{R}B$, $\overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}A \cap \overline{R}B$;

(5) $\underline{R}(\underline{R}A) = \overline{R}(\underline{R}A) = \underline{R}A$, $\overline{R}(\overline{R}A) = \underline{R}(\overline{R}A) = \overline{R}A$;

(6) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{R}A \subseteq \overline{R}B$, $\underline{R}A \subseteq \underline{R}B$;

(7) $\overline{R}(\varnothing) = \varnothing$, $\underline{R}U = U$.

其中 A, B 是 U 上的 fuzzy 子集.

证明　对于任意 $x \in U$，由式(10.10)及式(10.11)可得

$$\underline{R}A(x) \leqslant A(x) \leqslant \overline{R}A(x).$$

则(1)可证. 又因

$$\underline{R}(A \cap B)(x) = \min\{A(y) \wedge B(y) : y \in [x]_R\}$$
$$= \min\{A(y) : y \in [x]_R\} \wedge \min\{B(y) : y \in [x]_R\}$$
$$= \underline{R}A(x) \wedge \underline{R}B(x)$$

因此

$$\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}A \cap \underline{R}B.$$

其他性质类似可证.

10.3.2 模糊信息系统的粗糙集理论

定义 10.3.2 称(U,R)是一个 fuzzy 近似空间,若 R 是 U 上的 fuzzy 关系,且满足自反性,则称(U,R)为 fuzzy 信息系统;若 R 是 fuzzy 等价关系,则称(U,R)为 fuzzy 等价关系信息系统.

定义 10.3.3 设(U,R)为 fuzzy 信息系统,对于任意 $X \subseteq U$,称 fuzzy 集合$\underline{R}(X)$和$\overline{R}(X)$为 X 关于(U,R)的 fuzzy－下近似和 fuzzy－上近似,其中

$$\underline{R}(X)(y) = \min_{x \notin X}(1 - R(x,y)) \quad (y \in U) \tag{10.14}$$

$$\overline{R}(X)(y) = \max_{x \in X} R(x,y) \quad (y \in U) \tag{10.15}$$

而$\underline{R}: P(U) \to F(U)$和$\overline{R}: P(U) \to F(U)$分别称为 fuzzy－下近似算子和 fuzzy－上近似算子.

定理 10.3.2 设 (U,R)为 fuzzy 信息系统,则 fuzzy－下近似算子与 fuzzy－上近似算子满足以下性质:

(1) $\underline{R}(U) = U, \quad \overline{R}(\varnothing) = \varnothing$;

(2) $\underline{R}(X) = \sim\overline{R}(\sim X), \quad \overline{R}(X) = \sim\underline{R}(\sim X)$;

(3) $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y), \overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y)$;

(4) $\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y), \overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X) \cap \overline{R}(Y)$;

(5) $\underline{R}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}(X)$;

其中 X,Y 为 U 的经典集合.

证明 由式(10.14),式(10.15),$\forall y \in U$

$$\underline{R}(U)(y) = \min_{x \notin U}(1 - R(x,y)) = 1$$

$$\overline{R}(\varnothing)(y) = \max_{x \in \varnothing} R(x,y) = 0$$

则(1)得证.

由于

$$\underline{R}(\sim X)(y) = \min_{x \notin \sim X}(1 - R(x,y))$$

因而

$$\sim\underline{R}(\sim X)(y) = 1 - \min_{x \notin \sim X}(1 - R(x,y)) = \max_{x \in X} R(x,y) = \overline{R}(X)(y)$$

因此

$$\underline{R}(X) = \sim\overline{R}(\sim X).$$

同理$\overline{R}(X) = \sim\underline{R}(\sim X)$. (2)得证.

由于对于任意 $y \in X$

$$\begin{aligned}\underline{R}(X \cap Y)(y) &= \min_{x \notin X \cap Y}(1 - R(x,y)) \\ &= (\min_{x \notin X}(1 - R(x,y))) \wedge (\min_{x \notin Y}(1 - R(x,y))) \\ &= (\underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y))(y)\end{aligned}$$

因此

$$\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y).$$

同理可证

$$\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y).$$

(3)得证. (4)可以由(3)直接推得. 由于对于经典集合 $X \subseteq U$ 有 $X(y) = 1 \Leftrightarrow y \in X$, 因此当 $y \notin X$ 时, 由 R 的自反性和式(10.14)可得 $\underline{R}(X)(y) = 0$, 而当 $y \in X$ 时, 由 R 的自反性和式(10.15)可得$\overline{R}(X)(y) = 1$, 从而

$$\underline{R}(X)(y) \leqslant X(y) \leqslant \overline{R}(X)(y).$$

即证(5).

例 10.3.1　表 10.5 给出了一个关系数据库.

表 10.5

U	a_1	a_2	a_3	a_4	d
x_1	3	5	3	6	1
x_2	4	3	2	7	1
x_3	0	1	4	2	2
x_4	9	2	3	3	1
x_5	9	3	1	3	3
x_6	2	4	1	8	1

利用公式

$$r_{ij} = 2\sum_{k=1}^{4}(f_k(x_i) \wedge f_k(x_j)) / \sum_{k=1}^{4}(f_k(x_i) + f_k(x_j))$$

则得到 fuzzy 信息系统$(U, \boldsymbol{R})$, 其中

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 1 & 0.85 & 0.50 & 0.65 & 0.61 & 0.81 \\ 0.85 & 1 & 0.43 & 0.67 & 0.69 & 0.84 \\ 0.50 & 0.43 & 1 & 0.50 & 0.35 & 0.36 \\ 0.65 & 0.67 & 0.50 & 1 & 0.91 & 0.50 \\ 0.61 & 0.69 & 0.35 & 0.91 & 1 & 0.58 \\ 0.81 & 0.84 & 0.36 & 0.50 & 0.58 & 1 \end{pmatrix}$$

由此可见 $\boldsymbol{R}$ 是自反和对称的 fuzzy 关系，由于 $|U|=6$，则

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^6=\begin{pmatrix} 1 & 0.85 & 0.50 & 0.69 & 0.69 & 0.84 \\ 0.85 & 1 & 0.50 & 0.69 & 0.69 & 0.84 \\ 0.50 & 0.50 & 1 & 0.50 & 0.50 & 0.50 \\ 0.69 & 0.50 & 0.50 & 1 & 0.91 & 0.69 \\ 0.69 & 0.69 & 0.50 & 0.91 & 1 & 0.69 \\ 0.84 & 0.84 & 0.50 & 0.69 & 0.69 & 1 \end{pmatrix}$$

于是 $(U,\underset{\sim}{\boldsymbol{R}})$ 为 fuzzy 等价关系信息系统.

10.3.3 模糊信息系统上模糊集的 rough 近似

设 (U,R) 为 fuzzy 信息系统，下面我们介绍 fuzzy 信息系统上的 fuzzy 集合的 rough 近似.

定义 10.3.4 设 (U,R) 为 fuzzy 信息系统，A 是 U 上的 fuzzy 集合，称 $\underline{R}(A)$ 与 $\overline{R}(A)$ 分别为 A 关于 (U,R) 的 fuzzy－下近似与 fuzzy－上近似，其中隶属函数分别定义为

$$\underline{R}(A)(x)=\min\{A(y)\vee(1-R(x,y)):y\in U\}\ (x\in U) \quad (10.16)$$

$$\overline{R}(A)(x)=\max\{A(y)\wedge R(x,y):y\in U\}\ (x\in U) \quad (10.17)$$

而 $\underline{R}: F(U)\to F(U)$ 和 $\overline{R}: F(U)\to F(U)$ 分别称为 fuzzy－下近似算子和 fuzzy－上近似算子.

我们可以从定义 10.3.4 中得到几种特殊情况.

(1) 当 $A\subseteq U, R\subseteq U\times U$，即 A 为经典集合，R 为经典关系时

$$\begin{aligned}\underline{R}(A)(x)=1 &\Leftrightarrow \forall y\in U,\text{有 } A(y)\vee(1-R(x,y))=1\\ &\Leftrightarrow \forall y\in U, y\notin A \text{ 蕴含 } (x,y)\notin R\\ &\Leftrightarrow \forall y\notin A \text{ 蕴含 } y\notin [x]_R \Leftrightarrow [x]_R\subseteq A,\end{aligned}$$

$$\overline{R}(A)(x)=1\Leftrightarrow \exists y\in U,\text{使 } A(y)=1,\text{且 } R(x,y)=1\Leftrightarrow A\cap[x]_R\neq\varnothing.$$

(2) 当 $A:U\to[0,1]$ 且 $R\subseteq U\times U$，即 A 为 fuzzy 集合，R 为经典关系时

$$\begin{aligned}\underline{R}(A)(x)&=\min\{A(y)\vee(1-R(x,y)):y\in U\}\\ &=\min\{A(y):(x,y)\in R\}=\min\{A(y):y\in[x]_R\}\end{aligned}$$

$$\overline{R}(A)(x)=\max\{A(y)\wedge R(x,y):y\in U\}$$

$$= \max\{A(y) : (x,y) \in R\} = \max\{A(y) : y \in [x]_R\}.$$

(3) 当 $A \subseteq U$ 且 $R : U \times U \to [0,1]$，即 A 为经典集合，R 为 fuzzy 关系时

$$\underline{R}(A)(x) = \min\{A(y) \vee (1 - R(x,y)) : y \in U\} = \min_{y \notin A}(1 - R(x,y))$$

$$\overline{R}(A)(x) = \max\{A(y) \wedge R(x,y) : y \in U\} = \max_{y \in A}\{R(x,y)\}$$

由此可见，在 fuzzy 信息系统上定义的 fuzzy 集合的 rough 近似是各种特殊情形的合理推广.

定理 10.3.3　设 (U,R) 是 fuzzy 信息系统，fuzzy 集合 fuzzy-下近似 fuzzy-和上近似算子满足以下性质：

(1) $\underline{R}(U) = U, \overline{R}(\varnothing) = \varnothing$;

(2) $\underline{R}(A) = \sim\overline{R}(\sim A), \overline{R}(A) = \sim\underline{R}(\sim A)$;

(3) $\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}(A) \cap \underline{R}(B), \overline{R}(A \cup B) = \overline{R}(A) \cup \overline{R}(B)$;

(4) $\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}(A) \cup \underline{R}(B), \overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}(A) \cap \overline{R}(B)$;

(5) $\underline{R}(A) \subseteq A \subseteq \overline{R}(A)$.

其中 A, B 为 U 上的 fuzzy 集合.

证明类似定理 10.3.2.

§10.4　模糊信息系统的属性约简

设 (U,A,V,F) 是一个信息系统，其中 $F = \{f_i : i \leqslant m\}$，$f_i : U \to V_i$ 表示属性 $a_i \in A$ 关于对象的取值函数. 如果 $V_i = [0,1]$，则该信息系统称为 fuzzy 信息系统.

设 (U,A,V,F) 是一个 fuzzy 信息系统，$D_j : U \to [0,1]\,(j \leqslant r)$，记 $D = \{D_j : j \leqslant r\}$，称 (U,A,V,F,D) 为 fuzzy 目标信息系统或 fuzzy 决策系统.

10.4.1　模糊目标信息系统的属性约简

定义 10.4.1　设 (U,R) 是 fuzzy 近似空间. fuzzy 关系 R 在 U 上产生的划分定义如下：

$$U/R = \{[x_i]_R\}_{i=1}^{n} \tag{10.18}$$

其中 $[x_i]_R = \frac{r_{i1}}{x_1} + \frac{r_{i2}}{x_2} + \cdots + \frac{r_{in}}{x_n}$ 是由 x_i 和 R 生成的 fuzzy 等价类.

这里 U/R 是关系 R 在 U 上生成的划分，$[x_i]_R$ 是模糊集.

定义 10.4.2　设 (U,A) 是 fuzzy 目标信息系统，B 和 d 是 A 的条件属性集和决策属性集. d 的 B 正域是 U 上的模糊集，记为 $\mu_{\mathrm{pos}_B(d)}$，对任意 $x \in U$

$$\mu_{\mathrm{pos}_B(d)}(x) = \sup_{X \subseteq U/d} \mu_{\underline{B}X}(x). \tag{10.19}$$

定义 10.4.3　设 (U,A) 是 fuzzy 目标信息系统，B 和 d 是 A 的条件属性集和决策属性集. d 对 B 的依赖度定义如下

$$\gamma_B(d) = \sum_{x \in U} \mu_{\mathrm{pos}_B(d)}(x). \tag{10.20}$$

定义 10.4.4 设 (U,A)是 fuzzy 目标信息系统，$A = C \cup d$，B 是 C 的子集. $\forall a \in B$,如果 $\gamma_{B-a}(d) = \gamma_B(d)$,则称 a 为 B 中 d 不必要的,否则称 a 为 B 中 d 必要的. 如果 B 中的每个属性都是 d 必要的,我们称 B 是独立的,否则称 B 是依赖的.

定义 10.4.5 设 (U,A)是 fuzzy 目标信息系统,$A = C \cup d$，B 是 C 的子集. 如果 B 满足:

(1) $\gamma_B(d) = \gamma_C(d)$;

(2) $\forall a \in B, \gamma_{B-a}(d) < \gamma_B(d)$.

则称 B 是 C 的 d 约简.

10.4.2 模糊信息系统的信息测量及属性约简

在本小节中,我们从信息论的角度来研究模糊信息系统的属性约简.

设 (U,A)是模糊目标信息系统，$A = C \cup d$. 其中 C 是条件属性集，d 是决策属性集. 令 C 生成 U 上的模糊等价关系为 R. 那么由 x_i 和 R 生成的 fuzzy 等价类为

$$[x_i]_R = \frac{r_{i1}}{x_1} + \frac{r_{i2}}{x_2} + \cdots + \frac{r_{in}}{x_n}.$$

定义 10.4.6 设 R 是 U 上的模糊等价关系,则 R 的信息熵定义如下

$$H(R) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log\lambda_i \tag{10.21}$$

其中 $\lambda_i = \dfrac{|[x_i]_R|}{n}$, $|[x_i]_R| = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$.

定义 10.4.7 设 (U,A)是模糊目标信息系统,对于 $B, E \subseteq A$, B 和 E 的相互熵定义如下

$$H(B:E) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{|[x_i]_B \cap [x_i]_E|}{n} \tag{10.22}$$

定义 10.4.8 设 (U,A)是模糊目标信息系统,对于 $B, E \subseteq A$, B 和 E 的条件熵定义如下

$$H(E|B) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{|[x_i]_B \cap [x_i]_E|}{|[x_i]_B|} \tag{10.23}$$

定理 10.4.1 $$H(E|B) = H(B:E) - H(B) \tag{10.24}$$

定理 10.4.2 设 (U,A)是模糊信息系统, $\forall a \in B \subseteq A$,如果 a 是冗余的,则 $H(B) = H(B-a)$. 如果 a 是独立的,则 $H(B) > H(B-a)$. 如果 B 满足:

(1) $H(B) = H(A)$;

(2) $\forall a \in B$: $H(B) > H(B-a)$.

则 B 是约简.

定理 10.4.3　设 (U,A)是模糊目标信息系统，$A=C\cup d$. $\forall a\in B\subseteq C$,如果 a 是 B 中 d 冗余的，则 $H(d\mid B)=H(d\mid B-a)$. 如果 a 是 B 中 d 独立的，则 $H(d\mid B-a)>H(d\mid B)$. 如果 B 满足：

(1) $H(d\mid B)=H(d\mid C)$；

(2) $\forall a\in B: H(d\mid B-a)>H(d\mid B)$.

则 B 是 C 的 d 约简.

在模糊目标信息系统中，属性约简就是找到属性集族中能够保证决策规则不变的最小的属性子集. 由上面的分析可以看出，求取属性的约简，就是寻找保证条件属性族相对于决策属性的条件熵不变的那个最小的属性子集.

定理 10.4.2 和定理 10.4.3 从信息论的角度给出了模糊信息系统和模糊目标信息系统属性约简和相对约简的定义.

例 10.4.1　设 $U=\{x_1,x_2,x_3\}$，R_1,R_2,R_3 是由属性 a_1,a_2,a_3 生成的模糊等价关系，定义如下

$$R_1=\begin{pmatrix}1 & 0.9 & 0\\ 0.9 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},R_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0.8\\ 0 & 0.8 & 1\end{pmatrix},R_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0.9\\ 0 & 0.9 & 1\end{pmatrix}$$

于是$[x_1]_{R_1}=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{0.9}{x_2}+\dfrac{0}{x_3}$, $|[x_1]_{R_1}|=1.9$.

$$R_4=R_1\cap R_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad R_5=R_1\cap R_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则 R_1,R_2 的条件熵为 $H(R_1\mid R_2)=0.5654$, $H(R_2\mid R_1)=0.6174$.

设 R_d 是由决策属性 d 生成的模糊等价关系，

$$R_d=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

我们发现 $H(R_d\mid R_1R_2)=H(R_d\mid R_1R_3)=H(R_d\mid R_1R_2R_3)=0$. 这说明 R_1,R_2 的交关系与模糊关系 R_d 产生相同的划分，同样 R_1,R_3 的交关系也与模糊关系 R_d 产生相同的划分. 因此$\{a_1,a_2\}$和$\{a_1,a_3\}$是两个相对约简.

下面，利用定理 10.4.3 给出属性重要性的定义.

定义 10.4.9　设 (U,A)是模糊目标信息系统，$A=C\cup d$. $\forall a\in B\subseteq C$,则 a 相对于 d 的重要性定义为 $\mathrm{SIG}(a,B,d)=H(d\mid B-a)-H(d\mid B)$.

根据上述分析，给出模糊信息系统一个属性约简算法.

算法 1：

第(1)步　$\forall a\in A$,构造等价关系；

第(2)步　$\varnothing\rightarrow$red；

第(3)步　$\forall a_i \in A - \text{red}$,计算 $H_i = H(a_i, \text{red})$,结束;

第(4)步　选择满足 $H(a \mid \text{red}) = \max_i(\text{SIG}(a_i, \text{red})$ 的属性;

第(5)步　如果 $H(a \mid \text{red}) > 0$,则 $\text{red} \cup a \to \text{red}$ 跳至第(3)步,否则到 red.

结束.

下面,给出模糊目标信息系统的一个属性约简算法.

算法 2:

第(1)步　$\forall a \in A$,构造等价关系;

第(2)步　$\varnothing \to D - \text{red}$;

第(3)步　$\forall a_i \in C - \text{red}$,计算 $H_i = \text{SIG}(a_i, D - \text{red}, d)$,结束;

第(4)步　选择满足 $\text{SIG}(a_i, \text{red}, d) = \max_i(H_i)$ 属性;

第(5)步　如果 $\text{SIG}(a_i, \text{red}, d) > 0$,则 $D - \text{red} \cup a \to D - \text{red}$ 跳至第(3)步,否则到 $D - \text{red}$.

结束.

习　题　10

1. 设 $K = (U, R)$ 是一个知识库,其中 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_7\}$,$R = \{R_1, R_2, R_3\}$,其中等价关系 R_1, R_2 和 R_3 有下列等价类:

$$U/R_1 = \{\{x_1, x_4, x_5\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_6, x_7\}\};$$

$$U/R_2 = \{\{x_1, x_3, x_5\}, \{x_6\}, \{x_2, x_4, x_7\}\};$$

$$U/R_3 = \{\{x_1, x_5\}, \{x_6\}, \{x_3, x_4\}, \{x_2, x_7\}\}.$$

试求该知识库的约简和核.

2. 考虑表 10.6 给出的知识表达系统,试求该信息系统的约简和核.

表 10.6

U	a	b	c	d
1	0	1	2	0
2	1	2	0	2
3	1	0	1	0
4	2	1	0	1
5	1	1	0	2

3. 分别利用区分矩阵和 MIRBARK - 算法求取例 10.2.2 的约简和核.

4. 利用 10.4.2 节中的算法 2 求例 10.3.1 的约简.

5. 仿照定理 10.3.2 的证明给出定理 10.3.3 的证明.

参考文献

[1] 张文修,王国俊等.模糊数学引论[M].西安:西安交通大学出版社,1991.

[2] 罗承忠.模糊集引论[M].北京:北京师范大学出版社,1991.

[3] 汪培庄,李洪兴.模糊系统理论与模糊计算机[M].北京:科学出版社,1996.

[4] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理[M].北京:科学出版社,2000.

[5] Hong-Xing Li, P. C. Philip Chen and Han-Pang Huang. Fuzzy Neural Intelligent Systems[M]. CPC Press, FL, USA, 2001.

[6] 汪培庄.模糊集与随机集落影[M].北京:北京师范大学出版社,1985.

[7] 王国俊.L-Fuzzy 拓扑空间论[M].西安:陕西师范大学出版社,1988.

[8] 吴望名.模糊推理的原理与方法[M].贵阳:贵州科技出版社,1994.

[9] Hong Xing Li and Vincent C. Yen. Fuzzy Sets and Fuzzy Decision-Making [M]. CPC Press, FL, USA, 1995.

[10] Terano, T. Asai, K. and Sugeno, M. Fuzzy Systems theory and its applications[M]. Academic Press, New York, 1992.

[11] Dubious, D. and Prade, H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications [M]. Academic Press, New York, 1980.

[12] Kanfmann, A. Introduction to the Theory of Fuzzy subsets[M]. Vol. 1, New York, 1975.

[13] H.J. Zimmermann. Fuzzy sets theory and its applications [M]. Kluwer Nijhoff Publishing, 1984.

[14] 汪培庄.模糊集合论及其应用[M].上海:上海科技出版社,1982.

[15] 胡长流,宋振明.格论基础[M].郑州:河南大学出版社,1990.

[16] L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1, 1978(3~28).

[17] L. A. Zadeh. Fuzzy sets [J]. Inf. Control, 8, 1965, (338~353).

[18] L. A. Zadeh. Probability Measure of Fuzzy Events[J]. J. Math. Anal. Appl., 23, 1968, (421~427).

[19] 罗承忠.Fuzzy 集与集合套[J].模糊数学,4,1983.

[20] 罗承忠.扩散原理与模糊数[J].模糊数学,3,1984.

[21] 张振良等. 模糊代数与粗糙代数[M]. 武汉:武汉大学出版社, 2007.

[22] 史福贵. L-Fuzzy mapping of L-Fuzzy sets[J]. 模糊系统与数学,3,2000,(16~24).

[23] 马学文,罗从文. L-Fuzzy 集的分解原理[J]. 模糊系统与数学,1,2001,(17~20).

[24] 马学文,罗从文. L-Fuzzy 集的表现定理[J]. 模糊系统与数学,2,2001,(68~70).

[25] Wang Zhenyuan. the autocontinuity of set function and the fuzzy integral[J]. J. Math. Anal. Appl.,99,1984,(195~218).

[26] 张文修,乐惠玲. Fuzzy 集的模系结构[J]. 工程数学学报,1,1984.

[27] 汪培庄,张文修. 随机集及其模糊落影分布简化定义与性质[J]. 西安交通大学学报,6,1982.

[28] 汪培庄. 模糊集与模糊范畴[J]. 数学进展,1,1982.

[29] 汪培庄,张南纶. 落影空间—模糊集的概率描述[J]. 数学研究与评论,1,1983,(163~178).

[30] 汪培庄. 超 σ 域与集值映射的可测性[J]. 科学通报,2,1983,(1583~1585).

[31] 汪培庄,刘锡荃. 集值统计[J]. 工程数学学报,创刊号,1984.

[32] 汪培庄. 格拓扑的邻元结构与收敛关系[J]. 北京师范大学学报,2,1984.

[33] 王国俊. 论 Fuzzy 格之结构[J]. 科学通报,17,1984.

[34] 王国俊. 拓扑分子格(I)[J]. 陕西师范大学学报,6,1979,(或科学通报,18,1983).

[35] 王国俊. 广义拓扑分子格[J]. 中国科学(A 辑),12,1983.

[36] 王国俊,杨忠强. 完全分配格中的极大族理论及其应用[J],工程数学学报,1,1984.

[37] 王国俊. 广义序同态理论及其应用[J]. 东北数学,2,1985,(141~152).

[38] 王国俊. ϕ—极小集理论及其应用[J]. 科学通报,1986,(1049~1053).

[39] 王国俊. 完全分配格上的序同态[J]. 数学进展,1,1987,(55~60).

[40] 张振良. 集合套与集值统计[J]. 昆明理工大学学报,1,1989.

[41] 张振良. 逆序集值映射的落影[J]. 昆明理工大学学报,2,1989.

[42] 张振良. 集合套的落影分布函数[J]. 模糊系统与数学,2,1990,(38~44).

[43] Zhen-liang Zhang. Antitonic Set-Valued Mappings and Fuzzy Sets, First Asian Fuzzy System Symposium, 1993.

[44] Zhen-liang Zhang. Distribution Function of Falling Shadow of random Sets and Fuzzy Sets, Workshopon KnowledgeBased Systems and Models of logical Reasoning, 1988.

[45] 吴望名. Fuzzy 蕴涵代数[J],模糊系统与数学,1,1990,(56~63).

[46] 吴望名. 参数 Kleene 系统中的广义重言式[J]. 模糊系统与数学,1,2000,(1~7).

[47] 王国俊. 修正的 Kleene 系统中Σ—(α—重言式)理论[J]. 中国科学(E辑),1998,(146~152).

[48] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J]. 中国科学(E 辑)1,1999 (43~53).

[49] 王国俊. MV-代数、BL-代数、R0-代数与多值逻辑[J]. 模糊系统与数学,2002,(1~15).

[50] 裴道武,王国俊 . 逻辑系统的完备性[J]. 中国科学(E 辑)32(1),2002,(56~64).

[51] 李洪兴,变论域自适应模糊控制器[J]. 中国科学(E 辑),1,1999(32~42).

[52] 李洪兴,王加银,苗志宏 . 模糊控制系统的建模[J]. 中国科学(A 辑),9,2002,(772~781).

[53] 李洪兴. 从模糊控制的数学本质看模糊逻辑的成功[J]. 模糊系统与数学,4,1995,(1~14).

[54] Bellman, R. E. , Zadeh, L. A. , Decision-making in a Fuzzy Environment [J], Management Sci. 17, 1970,(141~164).

[55] Blin, J. M. , Fuzzy Relations in Group Decision Theory[J]. Journal of Cybernetics 4, 1974,(17~22).

[56] Bozdag, C. E. , Kahraman, C. , Ruan, D. , Fuzzy Group Decision Making for Selection Among Computer Integrated Manufacturing Systems[J]. Computers in Industry 51, 2003,(13~29).

[57] Pal, S. K. , Majumder, D. D. , Fuzzy Sets and Decision-making Approaches in Vowel and Speaker Recognition, IEEE Trans. , SIMCC-7, 1977,(625~629).

[58] Pedryca, W. , Some Aspects of Fuzzy Decision-making[J]. Kybernetes 11, 1982,(297~301) .

[59] Pedrycz, W. , Identification in Fuzzy Systems[J]. IEEE Trans. Systems Man Cybernet 14, 1984, (361~366) .

[60] Pedrycz, W. , Fuzzy Control and Fuzzy Systems [M]. Wiley/Research Studies Press, London, New York, 1989.

[61] Siler, W. , Ying, H. , Fuzzy Control Theory: The Linear Case[J]. Fuzzy Sets and Systems 33, 1989, (275~290) .

[62] Zimmermann, H. J. , Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions[J]. Fuzzy Sets and Systems 1, 1978, (45~55) .

[63] Zimmermann, H. J. , Fuzzy Set Theory and Its Applications[M]. Kluwer-Nijhoff Publishing, Boston-Dordrencht-Lancaster, 1985.

[64] Zimmermann, H. J. , Fuzzy sets, Decision Making, and Expert Systems [M]. Kluwer, Boston, 1987.

[65] 陈启浩. 模糊值及其在模糊推理中的应用[M]. 北京：北京师范大学出版社，2000.

[66] 陈水利，李敬功，王向公. 模糊集理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，2005.

[67] 冯英浚. 关于多目标规划问题的模糊解[J]. 科学通报，26，1981，(1028~1030).

[68]冯英浚，魏权龄. 多目标规划问题 Fuzzy 解的一般形式[J]. 模糊数学 2，1982，(29~36).

[69]刘普寅，吴孟达. 模糊理论及其应用[M]. 长沙：国防科技大学出版社，1998.

[70]张振良. 应用模糊数学[M]. 重庆：重庆大学出版社，1991.

[71]胡宝清. 模糊理论基础[M]. 武汉：武汉大学出版社，2004.

[72]彭祖赠，孙韫玉. 模糊数学及其应用[M]. 武汉：武汉大学出版社，2002.

[73]汤兵勇，路林吉，王文杰. 模糊控制理论与应用技术[M]. 北京：清华大学出版社，2002.

[74]宋晓秋. 模糊数学原理与方法[M]. 徐州：中国矿业大学出版社，2004.

[75]杨伦标，高英仪. 模糊数学原理及应用[M]. 广州：华南理工大学出版社，1993.

[76]章卫国，杨向忠. 模糊控制理论与应用[M]. 西安：西北工业大学出版社，2000.

[77]诸静. 模糊控制原理与应用[M]. 北京：机械工业出版社，2001.

[78]王立新. 模糊系统与模糊控制[M]. 北京：清华大学出版社，2003.

[79] D. Dubois, H. Prade, Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal General Systems 17 ,1990, (191~209).

[80] D. Dubois, H. Prade, Putting fuzzy sets and rough sets together, in: R. SlowiTnski (ed.), Intelligent Decision Support, Kluwer Academic, Dordrecht, 1992, (203~232).

[81] I. Jagielska, C. Matthews, T. Whitfort. An investigation into the app- lication of neural networks, fuzzy logic, genetic algorithms, and rough sets to automated knowledge acquisition for classification problems[J]. Neuro computing, 24, 1999, (37~54).

[82] 常犁云，王国胤，吴渝. 一种 Rough set 理论的属性约简及规则提取方法

[J]. 软件学报,10, 1999, (1206 ~ 1211) .

[83] M. Kryszkiewicz, Rough set approach to incomplete information systems [J]. Information Sciences, 112 ,1998,(39 ~ 49) .

[84] P . J. L ingras, Y. Y. Yao, Data mining using extensions of the rough set model [J]. Journal of the American Society for Information Science, 49, 1998, (415~422) .

[85] N. N. Morsi , M. M. Yakout, Axiomatics for fuzzy rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 100,1998, (327 ~ 342) .

[86] J. S. Mi, W. X. Zhang, An axiomatic characterization of a fuzzy generalization of rough sets[J]. Information Science, 160 , 2004, (235 ~ 249) .

[87] 苗夺谦,王珏 . 粗糙集理论中知识粗糙性与信息熵关系的讨论[J]. 模式识别与人工智能, 11, 1998, (34 ~ 40) .

[88] Z. Pawlak, Hard and soft sets, in: W. P. Ziarko (ed.) ,Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery, Springer,London, 1994, (130 ~ 135) .

[89] Z. Pawlak, Rough classification [J]. International Journal Man-Machine Studies, 20, 1984, (469 ~ 483) .

[90] Z. Pawlak, Rough set theory and its applications to data analysis[J]. Cybernetics and Systems: An International Journal, 29,1998, (661 ~ 688) .

[91] Z. Pawlak, S. KM. Wong, W. Ziarko, Rough sets: probabilistic versus deterministic approach [J]. International Journal of Man-Machine Studies, 29, 1988, (81 ~ 95) .

[92] Z. Pawlak , Rough set approach to Knowledge-based decision support[J]. European Journal of Operational Research, 99, 1997, (48 ~ 57) .

[93] J. C. Pomerol, Artificial intelligence and human decision making [J]. European Journal of Operational Research, 99, 1997, (3 ~ 25) .

[94] A. M. Radzikowska, E. E. Kerre, A comparative study of fuzzy rough sets [J]. Fuzzy sets and systems, 126, 2002, (137 ~ 155) .

[95] 王珏,苗夺谦,周育健. 关于 Rough Set 理论与应用的综述[J]. 模式识别与人工智能, 9, 1996, (337 ~ 344) .

[96] 王国胤 . Rough 集理论与知识获取[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.

[97] 张文修,吴伟志,梁吉业,李德玉. 粗糙集理论与方法,北京:科学出版社, 2001.

[98] 张文修,吴伟志 . 粗糙集理论介绍和研究综述[J]. 模糊系统与数学, 14, 2000, (1 ~ 12) .

[99] 张文修,梁怡,吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京:科学出版社, 2005.

[General Information]
书名=模糊集理论与方法
作者=张振良等编著
页数=259
SS号=12478541
DX号=
出版日期=2010.01
出版社=武汉大学出版社